



计算机与数学基础教学部

COMPUTER AND MATHEMATICS DEPARTMENT

# 课 程 教 案

课 程 名 称	高等数学一（上）
课 程 代 码	00000545
学 年 学 期	2023-2024-1
学 时 学 分	90/4
专 业 年 级	2023 级
课 程 类 别	专业必修
授 课 教 师	吴 优
教 学 单 位	计算机与数学基础教学部

2023 年 8 月

课程介绍

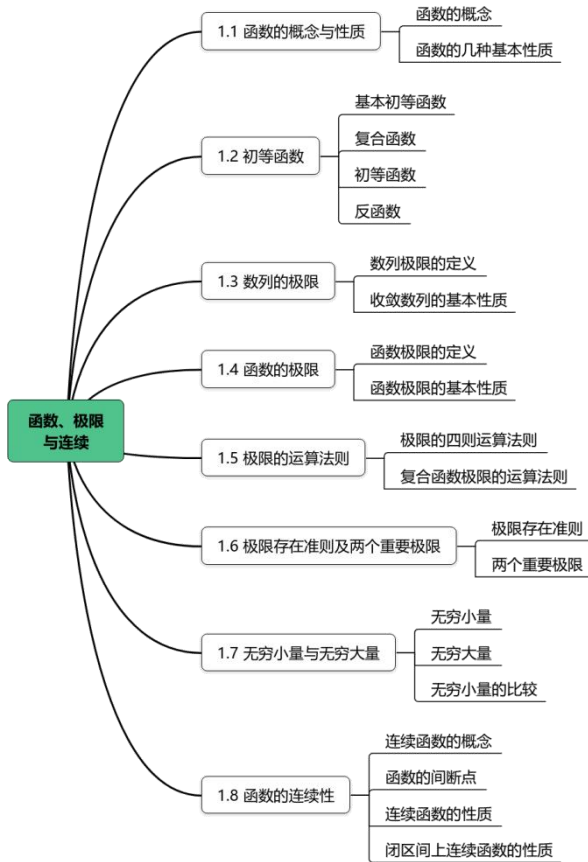
课程名称	高等数学一（上）	课程代码	00000545
授课对象	物理学（师范）、计算机科学与技术（师范）专业	学时/学分	90/4
教材分析	<p><b>教材：</b></p> <p>王娜等. 高等数学上册[M]. 北京机械工业出版社, 2023.8.</p> <p>本书涵盖了微积分的基础理论和应用知识，将理论与应用有效融合，符合教学改革发展的要求。本书具有显著的特色：（1）每章设置了一个课程思政微课视频，帮助学生了解数学家故事和数学史演变；（2）每章设置了关键知识点的微课视频和二维码答题，有利于学生自主学习；（3）提供了 Matlab 解题案例，满足不同层次的学生学习需求。在教学中，以线下教学为主、线上教学为辅，充分利用教材的特色，提升教学效果。</p> <p><b>参考书：</b></p> <p>[1] 同济大学数学科学学院. 高等数学上册（第八版）[M]. 北京高等教育出版社, 2023.06.</p> <p>[2] 上海高校《高等数学》编写组. 高等数学上册（第八版）[M]. 上海科学技术出版社, 2020.08.</p> <p>[3] 上海财经大学数学学院. 经济数学—微积分[M]. 人民邮电出版社, 2022.11.</p>		
学情分析	<p>本课程面向的是大学一年级学生，主要来自物理与计算机专业，在高中都有接触高等数学的函数内容。此外，物理专业学生的高中数学基础较好，基础知识掌握较为牢固；计算机专业学生的高中数学基础偏弱，基础知识掌握不牢固，学习高等数学知识存在一定的困难。</p> <p>总体上看，学生的数学基础参差不齐，部分学生的学习积极性需要着重关注。根据毕业要求，教学将重基础、重练习，以期学生能将知识应用到所学专业 and 日常生活，具备较好的数学素养。</p>		
课程内容	<p>本课程共有六章内容，涵盖的知识由浅入深，从理论到应用，逻辑性较强。</p> <div><pre>graph LR; A[高等数学一（上）] --- B[第一章 函数、极限与连续]; A --- C[第二章 导数与微分]; A --- D[第三章 微分中值定理与导数的应用]; A --- E[第四章 不定积分]; A --- F[第五章 定积分]; A --- G[第六章 微分方程]; B --- H[初等函数；数列极限、函数极限的概念和性质及其计算方法；函数连续性]; C --- I[导数的概念、求导法则与导数公式、高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数、函数的微分等内容]; D --- J[微分中值定理、洛必达法则、函数的单调性与极值、曲线的凹凸性及函数作图、导数在经济学中的简单应用等内容]; E --- K[不定积分的概念及性质、不定积分的基本公式、直接积分法、换元积分法、分部积分法、简单的有理函数积分法等内容]; F --- L[定积分的概念、性质及有关定理、定积分与不定积分的关系、定积分的计算、简单的应用及广义积分初步等知识]; G --- M[常见的微分方程的类型及其解法，并介绍微分方程在实际问题中的一些简单应用]; H --- N[基础理论]; I --- O[微积分学]; J --- O; K --- O; L --- O; M --- O;</pre><p><b>第一章 函数、极限与连续</b> 初等函数；数列极限、函数极限的概念和性质及其计算方法；函数连续性</p><p><b>第二章 导数与微分</b> 导数的概念、求导法则与导数公式、高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数、函数的微分等内容</p><p><b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b> 微分中值定理、洛必达法则、函数的单调性与极值、曲线的凹凸性及函数作图、导数在经济学中的简单应用等内容</p><p><b>第四章 不定积分</b> 不定积分的概念及性质、不定积分的基本公式、直接积分法、换元积分法、分部积分法、简单的有理函数积分法等内容</p><p><b>第五章 定积分</b> 定积分的概念、性质及有关定理、定积分与不定积分的关系、定积分的计算、简单的应用及广义积分初步等知识</p><p><b>第六章 微分方程</b> 常见的微分方程的类型及其解法，并介绍微分方程在实际问题中的一些简单应用</p></div>		

课程目标	<p><b>课程目标 1:</b> 学生系统掌握函数、极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程等知识的基本概念、基本定理、基本公式。</p> <p><b>课程目标 2:</b> 学生的计算能力扎实,掌握极限、导数、积分的基本计算方法,鼓励学生用计算机等辅助工具进行高效的数学计算。</p> <p><b>课程目标 3:</b> 学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和解决问题的能力提升,学生应能够运用数学方法和工具解决专业领域内或日常生活中的实际问题。</p> <p><b>课程目标 4:</b> 学生在理论知识、专业技能、道德品质以及社会责任感等多个维度上达到学生发展核心素养标准。</p>										
教学重点难点	<p><b>教学重点:</b> 导数与微分、不定积分和定积分。</p> <p><b>教学难点:</b> 不定积分、定积分和微分方程。</p>										
教学策略	<p>采用多种教学方法和教学手段融合的教学策略:</p> <p><b>教学方法:</b> 讲授法、讨论法、案例分析法等。</p> <p><b>教学手段:</b> 多媒体、学习通平台等。</p>										
学习评价	<p><b>考核方式:</b></p> <table border="1" data-bbox="454 947 1248 1211"> <tr> <th>课程目标</th><th>考核方式</th></tr> <tr> <td>课程目标 1</td><td>单元考试、期末闭卷考试</td></tr> <tr> <td>课程目标 2</td><td>单元考试、期末闭卷考试</td></tr> <tr> <td>课程目标 3</td><td>单元考试、期末闭卷考试</td></tr> <tr> <td>课程目标 4</td><td>项目完成或课堂表现</td></tr> </table> <p><b>考核标准:</b></p> <p><b>总成绩是过程性考核（30%）和终结性考核（70%）获得的总分数。</b></p> <p><b>1. 过程性考核:</b> 包括作业 45%、章节学习次数 5%、课程视频 15%、单元考试 20%和签到 15%，总分 100，占总成绩 30%。</p> <p>（1）作业（45%）：教师在线发布作业，按在线作业的平均分进行计分，满分 45 分；</p> <p>（2）章节学习次数（5%）：学生在线学习章节的任务点内容，学习次数达 30 次为满分，满分 5 分；</p> <p>（3）课程视频（15%）：学生在线学习自主学习课程视频，单个视频分值平均分配，满分 15 分；</p> <p>（4）单元考试（20%）：教师在线发布单元测试，按在线考试的平均分进行计分，满分 20 分；</p> <p>（5）签到（15%）：按学生出勤率计分，出勤率等于（出勤次数/签到总数），出勤率低于 5%，签到成绩计为 0 分，出勤率乘以 15 分为签到得分。</p> <p><b>2. 终结性考核:</b> 在期末，实行闭卷考试，考核题型包括单选题、填空题、计算题和证明题，满分 100 分，占总成绩 70%。</p>	课程目标	考核方式	课程目标 1	单元考试、期末闭卷考试	课程目标 2	单元考试、期末闭卷考试	课程目标 3	单元考试、期末闭卷考试	课程目标 4	项目完成或课堂表现
课程目标	考核方式										
课程目标 1	单元考试、期末闭卷考试										
课程目标 2	单元考试、期末闭卷考试										
课程目标 3	单元考试、期末闭卷考试										
课程目标 4	项目完成或课堂表现										

## 第 1 章 函数、极限与连续

授课题目	§1.1 函数的概念及性质	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解函数的基本概念，包括定义域、值域、对应法则等。 2. 掌握函数的四大基本性质。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的抽象思维能力。通过函数概念的学习，引导学生从具体实例中抽象出一般规律，形成对函数概念的深入理解。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。通过对函数的学习，让学生理解数学中的函数思想，掌握数学中函数的深层定义，了解应用价值，以提高学生的数学素养。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 函数的定义、函数的性质。 <b>教学难点：</b> 函数的有界性。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>第 1 章的章节介绍：</b> 根据该章节的思维导图，本章首先介绍函数的基本概念和性质以及反函数、复合函数、基本初等函数等概念；其次讨论数列极限、函数极限的概念和性质及其计算方法，并在		

此基础上给出函数连续性的定义，同时揭示初等函数的连续性；最后介绍连续函数的几个性质.



### 一、导入新课

引例：设某超市购进鸡蛋 2000 公斤，按每公斤 6 元的价格出售，当售出的数为  $x$  公斤时，其收益  $L$  可按公式  $L = 6x$  计算， $x \in [0, 2000]$ .

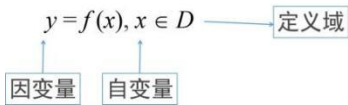
解： $x$  为自变量， $L$  为因变量， $x \in [0, 2000]$  为定义域.

### 二、讲解新知

#### 1. 定义

设  $D$  是一个非空实数集合， $f$  是一个对应法则，在此法则下，对每一个  $x \in D$ ，都有唯一确定的实数  $y$  与之对应，称变量  $y$  是变量  $x$  的函数.

记作： $y = f(x), x \in D$



定义域  $D$ ：使得函数有意义的  $x$  的集合；

值域：因变量  $y$  的集合.

#### 2. 函数的表示法

以思维导图的形式展示章节内容，启发学生在学习中学要养成逻辑性，要有知识体系，才能清晰知识与知识之间的联系。

引例：利用生活小例子在学习通平台设置讨论活动，再设置抢答，对回答得完整的同学进行加分鼓励。

重点 1：函数的定义是本节课的重点内容，提醒学生要理解并掌握函数的基本概念。

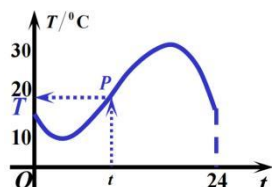
### (1) 列表法

例如：一水库的水位在 5 个小时内水位高度变化情况：

时间(小时)	0	1	2	3	4	5
高度(米)	10	10.05	10.10	10.15	10.20	10.25

### (2) 图像法

例如：某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况，设某天 24 小时的气温变化曲线.



### (3) 解析法

数学表达式表示两个变量之间的函数关系，这种表示方法叫做解析法，这个数学表达式称作函数的解析式.

例 1 设有一个半径为  $r$  的半圆形铁皮，将此铁皮做成一个圆锥形容器，问该圆锥形容器的体积  $V$  是多少？

$$\text{解: } 2\pi r_0 = \pi r \Rightarrow r_0 = \frac{r}{2}, \quad h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

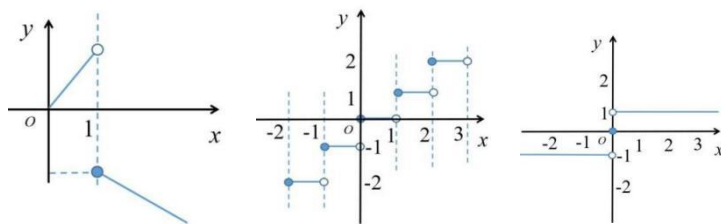
$$V = \frac{1}{3}\pi r_0^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}r, \quad V = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi r^3$$

此外，有常见的几种分段函数：

$$(1) \quad y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad y = [x]$$

$$(3) \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$(4) \quad y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

例 1：利用学习通随机提问的方式引导学生如何建立解析式。

分段函数作图培养学生的基本数学素养：

利用学习通随机点名的方式，抽学生将画出的分段函数图像发到学习通中，展示到多媒体中供大家评价正确与否。

例2 求定义域: (1)  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$

$$(2) f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x^2-1}$$

解: (1) 实数集;

$$(2) \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases},$$

所以定义域为  $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

随堂练习 已知  $f(e^x - 1) = x^3 + 2$ , 求  $f(x)$  的定义域.

解: 令  $t = e^x - 1$ , 则  $x = \ln(t+1)$ ,

$$\text{可得 } f(t) = \ln^3(t+1) + 2,$$

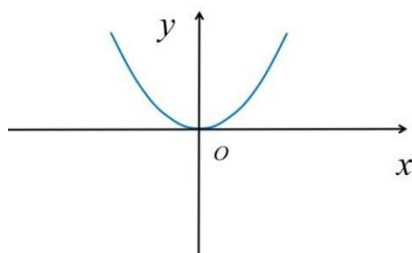
$$\text{即 } f(x) = \ln^3(x+1) + 2,$$

所以函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ .

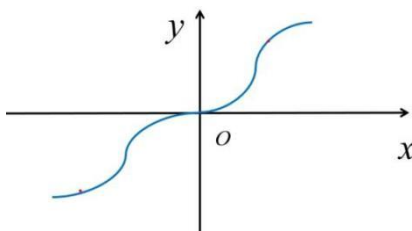
### 3. 函数的性质

#### (1) 奇偶性

1) 对于  $x \in (-a, a)$ , 有  $f(-x) = f(x)$ , 称  $f(x)$  为偶函数, 图像关于  $y$  轴对称:



2) 对于  $x \in (-a, a)$ , 有  $f(-x) = -f(x)$ , 称  $f(x)$  为奇函数, 图像关于原点对称:



其它相关性质:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 1) 奇 + 奇 = 奇 | 2) 偶 + 偶 = 偶 |
| 3) 奇 × 奇 = 奇 | 4) 偶 × 偶 = 偶 |
| 5) 奇 × 偶 = 奇 |              |

例3 判断函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  在区间  $(-1, 1)$  内的奇偶性.

解: 对于任意  $x \in (-1, 1)$ , 有

$$f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x).$$

利用例题说明函数定义域的求法: 使得解析式有意义.

随堂练习: 提前将该题目发布到学习通上, 学生作答后发到学习通, 及时点评, 以巩固新学知识.

重点2: 函数的性质, 在讲授时注重举例说明.

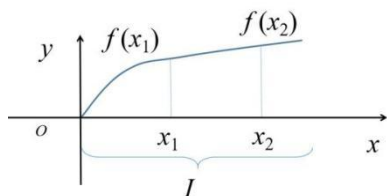
相关性质: 利用学习通平台随机点名的方式, 让学生头脑风暴式地举例说明五个注意点的相关例子.

例3: 利用电子手写笔在多媒体上进行板书, 引导学生如何思考以快速解题.

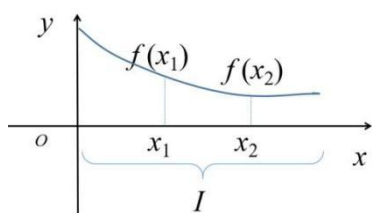
## (2) 单调性

$y=f(x)$ , 定义域  $D$ , 区间  $I \subset D$ , 对于区间  $I$  上任意两点  $x_1$  和  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有:

1)  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调增加 (严格单调递增) 函数;

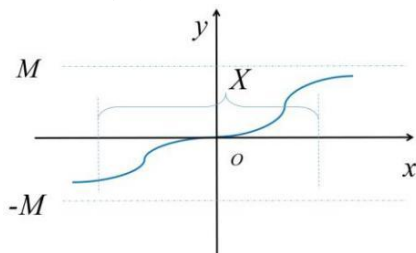


2)  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调递减 (严格单调递减) 函数;



## (3) 有界性

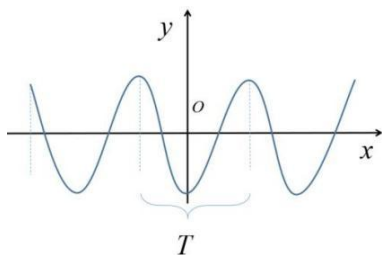
设区间  $X \subset D$ , 若存在  $M > 0$ , 使得对于  $x \in X$ , 有  $|f(x)| \leq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  在区间  $X$  上有界, 否则称无界.



例如: 1) 函数  $y = \sin x$ , 因为  $|\sin x| \leq 1$ , 所以它在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的; 2)  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上是无界的, 而在  $(1, 2)$  及  $[1, +\infty)$  上是有界的.

## (4) 周期性


设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个不为零的常数  $T$ , 使得对于  $x \in D$ , 且都有  $f(x+T)=f(x)$  ( $x \pm T \in D$ ) 恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数 (最小正周期),  $T$  称为  $f(x)$  的周期.



注 不是所有的周期函数都有最小正周期. 例如常数函

难点: 函数的有界性。

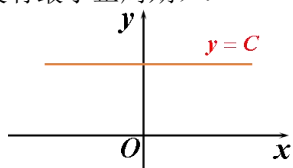


<p>数 <math>y=c</math> (<math>c</math> 为常数), 显然任意正数都是其周期, 而无最小正数.</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 函数的定义: 定义域、对应法则、值域</li> <li>2. 函数定义域的求法</li> <li>3. 函数的性质: 奇偶性、单调性、有界性、周期性</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考: 所学专业中有哪些需要构建函数关系式的情况?</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考: 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>通过随堂练习、高密度提问等方式, 我可以快速了解到学生的学习效果, 且整个课堂显得十分有活力, 学生学习的积极性得到了调动。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>本节课的内容比较简单, 部分知识是学生在高中已经学过的知识, 故本节课的例子讲解偏少, 这忽略了基础薄弱的学生, 导致有部分学生听起来比较吃力, 且课堂的高密度提问增加了部分学生听课的压力。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>对于刚进入大学校园学习的新生, 对大学的学习方式还在探索中, 因此作为教师需要对学生给予积极的鼓励、做良好的引导, 建立了良好的师生关系, 使学生能够愿意向我请教问题并寻求帮助。</p>	

授课题目	§1.2 初等函数	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握基本初等函数的定义、表达式、图像及其基本性质。 2. 掌握初等函数的形成、复合函数的来源、幂指函数的转换等。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和观察能力。学生应能通过观察复合函数以分析该复合函数是如何由初等函数复合而成。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的基础数学素养。学生具备扎实的数学基础知识，通过图像描绘感受数学的美，以此提高学生的数学思维和数学表达能力，能够用数学语言清晰、准确地表达数学问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 基本初等函数、复合函数。 <b>教学难点：</b> 复合函数、幂指函数。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习函数的概念与基本性质以导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 基本初等函数</b>		导入新课：以提问的方式引导学生回顾上堂课的主要知识点，带领学生快速融入课堂。

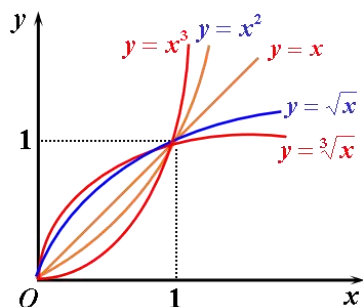
### (1) 常数函数

函数  $y = C$  ,  $C$  为常数, 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 是偶函数、周期函数 (没有最小正周期) .



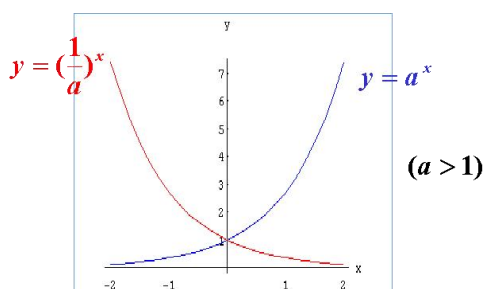
### (2) 幂函数

函数  $y = x^\mu$  为幂函数,  $\mu$  为常数, 定义域随  $\mu$  而变.



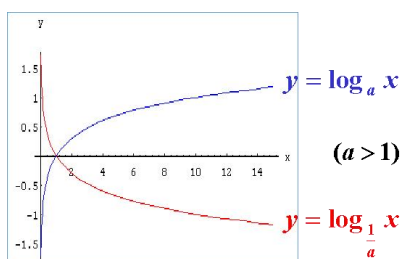
### (3) 指数函数

函数  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 为指数函数, 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .



### (4) 对数函数

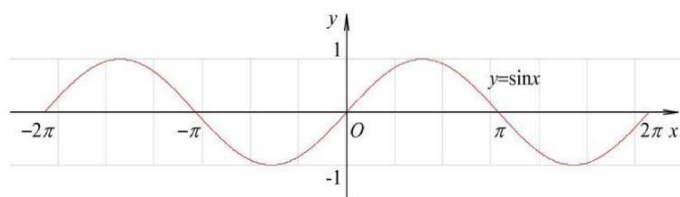
函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 为对数函数, 定义域为  $(0, +\infty)$ .



当  $x = a$  时,  $\log_a a = 1$  ; 当  $a = 10$  时,  $\log_{10} x = \lg x$  ;  
当  $a = e$  时,  $\log_e x = \ln x$  .

### (5) 三角函数

1) 函数  $y = \sin x$  为正弦函数, 定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 值域  $[-1, 1]$ .



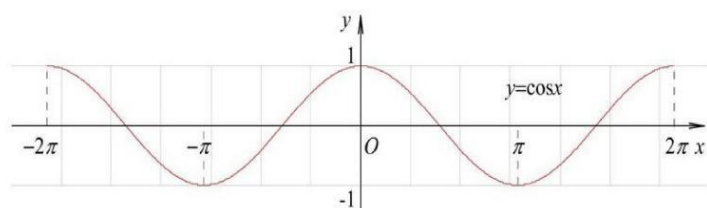
重点 1: 六种基本初等函数。

观察分析幂函数的图像:  
先让学生观察幂函数的图像, 然后分析相关的规律, 试着对规律进行总结。

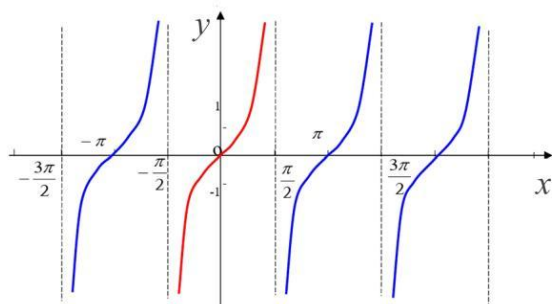
观察分析指数和对数函数的图像:  
先让学生观察这两大函数的图像, 然后分析相关的规律, 试着对规律进行总结并说明有什么联系。

提问: 借助学习通随机提问学生指出正弦函数具有哪些性质。

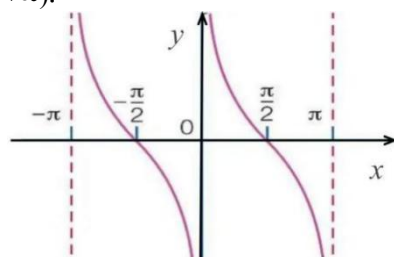
2) 函数  $y = \cos x$  为余弦函数, 定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 值域  $[-1, 1]$ .



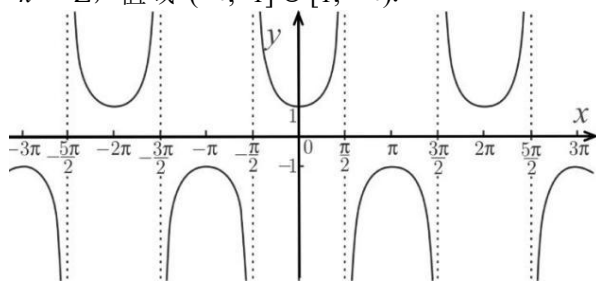
3) 函数  $y = \tan x$  为正切函数, 定义域  $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$ , 值域  $(-\infty, +\infty)$ .



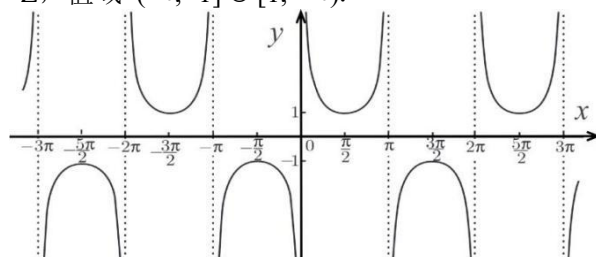
4) 函数  $y = \cot x$  为余切函数, 定义域  $x \neq k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$ , 值域  $(-\infty, +\infty)$ .



5) 函数  $y = \sec x = 1 / \cos x$  为正割函数, 定义域  $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$ , 值域  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .



6) 函数  $y = \csc x = 1 / \sin x$  为余割函数, 定义域  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 值域  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

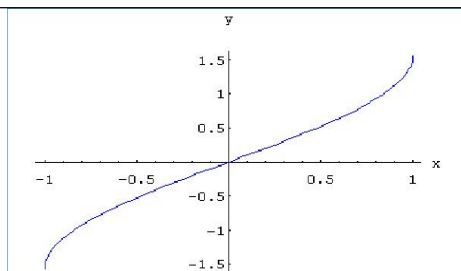


### (6) 反三角函数

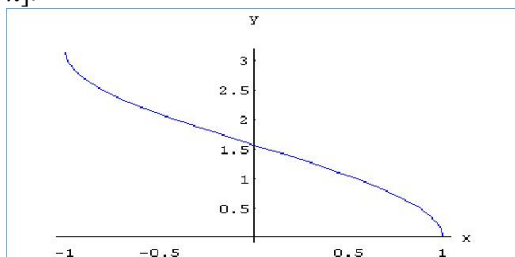
1) 函数  $y = \arcsin x$  为反正弦函数, 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

提问: 借助学习通随机提问学生指出正切函数具有哪些性质。

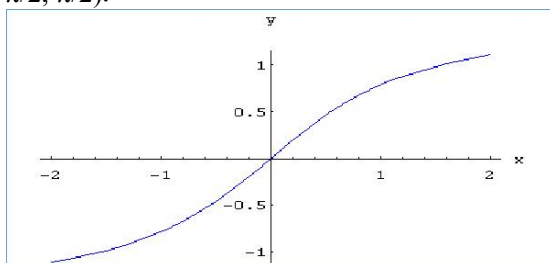
提问: 借助学习通随机提问学生指出正割函数具有哪些性质 (可以借助上网查阅), 培养学生养成探索求知的习惯。



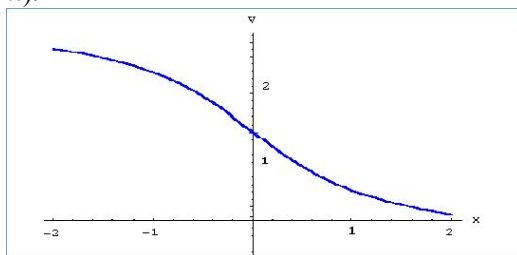
2) 函数  $y = \arcsin x$  为反正弦函数, 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $[-\pi/2, \pi/2]$ .



3) 函数  $y = \arctan x$  为反正切函数, 定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 值域  $(-\pi/2, \pi/2)$ .



4) 函数  $y = \text{arccot } x$  为反余切函数, 定义域  $(-\infty, +\infty)$ , 值域  $(0, \pi)$ .



组织讨论: 如何快速记住以上六种基本初等函数的图像?

以上函数图像的描绘, 让学生感受数学之美, 进而助于记忆函数的性质。

重点 2 (也是难点): 复合函数的构成与拆分。

例 1: 先让学生自行讨论, 然后自行总结函数复合需要满足什么条件。

## 2. 复合函数

**定义:** 把两个或两个以上的简单函数组合成另一函数。设函数  $y = f(u)$ ,  $u \in D_f$ ,  $y \in R_f$ ,  $u = g(x)$ ,  $x \in D_g$ ,  $u \in R_g$ , 若  $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ , 则复合:  $y = f[g(x)]$ ,  $x \in \{x | g(x) \in D_f\}$ 。

例如:  $y = \cos 2x$ ;  $u = 2x$ ;  $y = \cos u$  除自变量  $x$  和因变量  $y$  外, 还出现了中间的变量  $u$ ,  $y$  通过  $u$  而成为关于  $x$  的函数。

例 1 判断  $y = f(u) = 1 + u^2$  和  $u = g(x) = \ln(1+x^2)$  是否可以复合?

**解:** 由于  $D_f = R$ ,  $R_g = [0, +\infty)$ , 因为  $R_g \subseteq D_f$ , 所以  $f(u)$  与  $g(x)$  能够构成复合函数,

$$y = f[g(x)] = 1 + g^2(x) = 1 + \ln^2(1+x^2).$$

**注意的点:**

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数

<p>(2) 复合函数可以有多个中间变量</p> <p>(3) 更多是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数来构成的</p> <p>(4) 函数的复合一般与复合的次序有关</p> <p>随堂练习 1 分解函数 <math>y = 3^{\arccos \sqrt{2-x^2}}</math>.</p> <p>解: <math>y = 3^u</math>, <math>u = \arccos v</math>, <math>v = \sqrt{w}</math>, <math>w = 2 - x^2</math>.</p> <p><b>复合函数求定义域的情形:</b></p> <p>(1) 已知 <math>f(x)</math> 的定义域, 求 <math>f[g(x)]</math> 的定义域.</p> <p>(2) 已知 <math>f[g(x)]</math> 的定义域, 求 <math>f(x)</math> 的定义域.</p> <p>(3) 已知 <math>f[g(x)]</math> 的定义域, 求 <math>f[h(x)]</math> 的定义域.</p> <p><b>总结:</b> 对于复合函数, 其定义域仍为 <math>x</math> 的取值范围.</p> <p><b>3. 初等函数</b></p> <p><b>定义:</b> 由基本初等函数经过<b>有限次的四则运算</b>(加、减、乘、除)以及<b>有限次的函数复合</b>所构成的并且可用一个式子表示的函数.</p> <p><b>4. 幂指数函数</b></p> <p><b>定义:</b> 设函数 <math>f(x)</math> 和 <math>g(x)</math> 是两个初等函数, <math>f(x) &gt; 0</math>, 则: <math>y = [f(x)]^{g(x)}</math> 就是幂指数函数.</p> <p><b>重点:</b> 幂指数函数转为指数函数 <math>y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}</math>.</p> <p><b>5. 反函数</b></p> <p>引例: <math>y = 5x</math>, 求出变量 <math>x</math> 关于变量 <math>y</math> 的函数关系.</p> <p><b>定义:</b> 设函数 <math>y = f(x)</math> 的定义域为 <math>D_f</math>, 值域是 <math>R_f</math>, 若对于 <math>\forall y \in R_f</math>, 都有唯一对应值 <math>x \in D_f</math>, 满足 <math>x = g(y)</math> 的对应法则, 则 <math>y = f(x)</math> 的反函数为 <math>x = g(y)</math>, 记作: <math>y = f^{-1}(x)</math>.</p> <p><b>注意的点:</b></p> <p>(1) 只有一一对应的函数(自变量不同时因变量也不同)才有反函数;</p> <p>(2) <math>y = f(x)</math> 与 <math>y = f^{-1}(x)</math> 的定义域、值域互相交换.</p> <p><b>6. 隐函数</b></p> <p>将解析式为 <math>y = f(x)</math> 的函数关系称作显函数.</p> <p><b>定义:</b> 自变量 <math>x</math> 与因变量 <math>y</math> 之间的对应关系不明显: 将 <math>x</math> 与 <math>y</math> 都看作变量, 在二元方程 <math>F(x, y) = 0</math> 中, 将该类函数关系称作隐函数.</p> <p>例如: 隐函数 <math>xy - 2x + 3y - 1 = 0</math> (可显化); <math>xy - e^y = 0</math> (不可显化).</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 基本初等函数(六类)</li> <li>2. 复合函数及其分解、定义域</li> <li>3. 初等函数</li> <li>4. 幂指数函数</li> <li>5. 反函数及其求法(定义域和值域)</li> <li>6. 隐函数</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> </ol>	<p>随堂练习 1: 在学习通平台上发布习题, 学生将做好的过程上传到平台, 及时进行点评。</p> <p>复合函数求定义域是拓展内容: 培养学生解题的逻辑性以及知识的扩展性。</p> <p><b>重点 3:</b></p> <p>强调幂指数函数转为指数函数的应用: 幂指数函数转为指数函数是后期知识求极限和求导重要基础。</p> <p><b>思考和讨论:</b> 基本初等函数中谁与谁互为反函数, 说明反函数具备的特点有哪些。</p>
---	--

<p>2. 学习通上对应的作业</p> <p>3. 思考：复合函数的拆分满足什么特点？</p> <p>五、板书设计</p> <div data-bbox="301 344 943 792"><pre>graph LR; A[1.2 初等函数] --- B[基本初等函数 (重点)]; A --- C[复合函数 (重点和难点)]; A --- D[幂指函数 (重点)]; A --- E[反函数]; A --- F[隐函数];</pre></div>	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力，并牢牢掌握高等数学的基础理论。</p>
<p>教学反思</p> <p>1. 成功之处</p> <p>通过描绘基本初等的函数图像，使得学生能够感受数学的美妙；通过组织讨论，学生给出的答案使我有意想不到的收获；讲授与多媒体手段的结合，能够更加直观地解释基础理论知识，使得学生能够快速理解基本知识和重点知识。</p> <p>2. 存在问题</p> <p>本节课的理论知识较多，部分学生在后半段已经注意力不集中，吸收知识的积极性有所减弱，使得学生对难点知识的理解有困难。</p> <p>3. 改进措施</p> <p>今后将在难点知识处给出更多的例题讲解或给出更多的时间对难点知识进行答疑，以便使更多的学生掌握难点，进而提升学生克服困难的积极性和动力。</p>	

授课题目	§1.3 数列极限	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解数列极限的定义：能够明确数列极限是描述数列中项随着项数的增大而逐渐趋近于某一常数的过程。 2. 掌握数列极限的基本性质：学生能够掌握数列极限的基本性质，并能利用这些性质进行简单的数列极限计算。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和观察能力。学生能够通过观察数列的通项公式或前几项，分析出数列的变化趋势，并预测其可能的极限值。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的抽象思维品质。通过数列极限的学习，学生能够体会到数学中的抽象思维方法，如从具体到抽象、从有限到无限的思维过程，提高数学抽象思维能力。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 数列极限的定义和性质。 <b>教学难点：</b> 数列极限的性质。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 观察下列几组数的特点： (1) 1, 2, 3, 4, ... (2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ (3) 1, -1, 1, -1, ...		



归纳特点:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, \dots, n$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

$$(3) \quad 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}$$

当  $n$  无限增大时, 通项  $a_n$  的变化趋势:

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, \dots, n \rightarrow \text{无限大}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n} \rightarrow \text{接近于 } 0$$

$$(3) \quad 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1} \rightarrow 1 \text{ 或 } -1$$

## 二、讲解新知

### 1. 数列极限的定义

**定义 1:** 按正整数顺序  $1, 2, 3, \dots$  排列的无穷多个数, 称为**数列**. 记作:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , 一般简记为:  $\{a_n\}$ . 其中的每个数称为: 数列的项;  $a_n$  被称为: 数列的通项或一般项.

**定义 2:** 对数列  $\{a_n\}$ , 存在常数  $A$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 总存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - A| < \varepsilon$  恒成立, 则  $\{a_n\}$  的极限为  $A$ , 或称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 记作:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

**注:** (1)  $N$  和  $\varepsilon$  相关, 且  $N$  的取值不唯一

(2)  $\varepsilon$  可理解为误差要求, 可取无限小

(3) 根据  $\varepsilon$  找到满足要求的  $N$  以证明极限存在与否  
可理解为: 设数列  $\{a_n\}$ , 当  $n$  无限增大时, 若  $a_n$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称数列  $\{a_n\}$  以  $A$  为极限.

如果当  $n$  无限增大时,  $a_n$  不能无限接近于某个确定的常数, 则称当  $n$  无限增大时, 数列  $\{a_n\}$  发散或极限不存在.

引例:

当  $n$  无限增大时, 通项  $a_n$  的变化趋势:

$$(1) \quad 1, 2, 3, 4, \dots, n \rightarrow \text{发散}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n} \rightarrow \text{收敛}$$

$$(3) \quad 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1} \rightarrow \text{发散}$$

此外, 几个比较常见的极限:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n (a \neq 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a} \cdot a} = e^a (a \neq 0)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 (0 < a < 1)$$

导入新课: 让学生先观察几组数列的特点, 然后讨论, 最后试着进行总结, 以此培养学生的观察分析素养, 提升学习的自主性。

提问: 借助学习通随机提问学生引例中的数列是否收敛。

## 2. 数列极限的性质

**性质 1 (唯一性)** 收敛数列的极限是唯一的.

**定义 3:** 对数列  $\{a_n\}$ , 若存在正数  $M$ , 使得对于一切正整数  $n$ , 恒有  $|a_n| \leq M$ , 则称数列  $\{a_n\}$  有界, 否则无界.

**性质 2 (有界性)** 收敛数列必为有界数列.



推论 无界数列必定发散.

**性质 3 (保号性)** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 且  $a > b$ , 则必存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $a_n > b_n$ .

推论 1 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 且存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $a_n > b_n$ , 则  $a > b$ .

推论 2 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a > 0$  (或  $a < 0$ ), 则必存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $a_n > 0$  (或  $a_n < 0$ ).

推论 3 若数列  $\{a_n\}$  从某项起有  $a_n \geq 0$  (或  $a_n \leq 0$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a \geq 0$  (或  $a \leq 0$ ).

**定义 4:** 将数列  $\{a_n\}$  在保持原有顺序的情况下, 任取其中无穷多项所构成的新数列称为数列  $\{a_n\}$  的子数列, 简称子列.

例如:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots, a_{2n}, \dots$

子数列1:  $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots, a_{2n}, \dots$

子数列2:  $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n-1}, \dots$

**性质 4 (收敛数列与其子列间的关系)** 如果数列  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 那么它的任一子列也收敛, 且均收敛于  $A$ .

推论 1 若数列  $\{a_n\}$  有两个子列收敛于不同的极限, 则数列  $\{a_n\}$  是发散的.

例如:  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}$

子数列1:  $1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

子数列2:  $-1, -1, -1, -1, \dots, -1, \dots$

**定义 5** 若数列  $\{a_n\}$  满足条件  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ) ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ), 则称数列  $\{a_n\}$  是单调增加的 (单调递减的).

## 三、课程小结

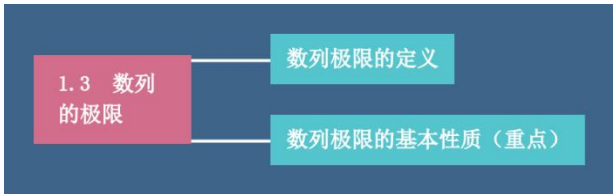
1. 数列极限的定义
2. 常见数列的极限
3. 数列极限的性质

## 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业
3. 思考: 中国古诗词中有哪些诗或词中可以反映极限的思想?

重点 (也是难点): 数列极限的基本性质。

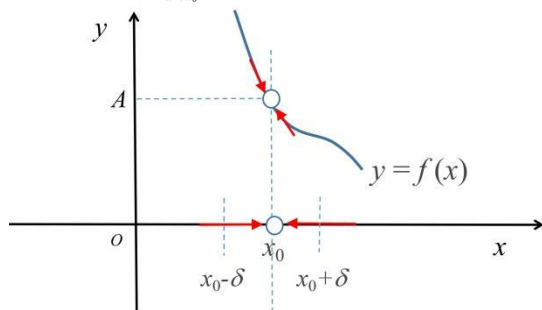
课后思考: 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力, 并将数学与中国文诗词结合, 培养学生的文学素养。

<p><b>五、板书设计</b></p> 	
<p><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我利用了多媒体等现代化教学手段辅助教学，通过动画、板书等方式展示数列极限的概念和性质，学生能够直观地看到一组数列的变化趋势，判断数列的极限是否存在，进而理解数列的极限。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>极限的定义语言本身难于理解，这也导致部分学生在听讲时已经有所放弃，故而后面讲解的数列极限的基本性质也没有认真听讲，使得整堂课的听讲幅度大大变小。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>今后可利用通俗的语言解释极限的定义，减小学生理解定义的难度，以此保证学生对高等数学知识的学习积极性。</p>	

授课题目	§1.4 函数极限	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解函数极限的基本概念。学生能够清晰理解函数极限的定义，包括左极限、右极限和极限的概念。 2. 掌握极限的运算法则。学生能够熟悉并应用极限的四则运算法则，包括加法、减法、乘法和除法的极限运算法则。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和观察能力。学生能够通过观察函数的表达式或图形，分析函数的极限状态，包括极限是否存在、极限值是多少等。。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。学生需要严谨地处理数学符号和逻辑关系，这有助于培养他们的数学素养。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 函数极限的定义。 <b>教学难点：</b> 函数极限的性质。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习数列极限进行导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 函数极限的定义</b> 目的：设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ ，函数 $f(x)$ 的极限就是自变量 $x$ 在定义域 $D$ 内变化时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势。 <b>两种情形：</b>		<b>导入新课：</b> 利用学习通平台抽学生回答数列极限的基本性质，以此引导学生快速进入课堂。

(1) 自变量  $x$  任意接近于  $x_0$ ，且  $x \neq x_0$ ，记为  $x \rightarrow x_0$ 。

**定义 1:** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义，在点  $x_0$  处可以没有定义，存在常数  $A$ ，对于  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  中的所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限，或称函数  $f(x)$  收敛于  $A$ ，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。



理解为：设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义，当  $x \rightarrow x_0$  时，如果函数  $f(x)$  的值无限接近于某一确定常数  $A$ ，则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限。

**注：** 函数在点  $x_0$  处可以没有定义。

由定义可得：

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

1) 自变量  $x$  从左侧接近于  $x_0$ ，即  $x < x_0$ ，记为  $x \rightarrow x_0^-$ 。

**定义 2:** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的左邻域内有定义，存在常数  $A$ ，对于  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $(x_0 - \delta, x_0)$  中的所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时的左极限，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

2) 自变量  $x$  从右侧接近于  $x_0$ ，即  $x > x_0$ ，记为  $x \rightarrow x_0^+$ 。

**定义 3:** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的右邻域内有定义，存在常数  $A$ ，对于  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得  $(x_0, x_0 + \delta)$  中的所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时的右极限，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

**例 1** 设函数为  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

**解：** 当  $x > 0$  时， $|x| = x$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ ；

当  $x < 0$  时， $|x| = -x$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$ ；

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ，由定理 1 得， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在。

**例 2** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$  在  $x \rightarrow 0$  时的极限。

**解：** 当  $x < 0$  时， $f(x) = x-1$ ，则函数  $f(x)$  的左极限，

**重点：** 两种函数极限的定义。

**快问快答：** 利用学习通平台随机抽学生回答由定义可得下列极限分别是多少？以此判断学生掌握情况。

**案例分析：** 利用第一种函数极限判别其它函数在某点处的极限是否存在。

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 ;$$

当  $x > 0$  时,  $f(x) = x+1$ , 则函数  $f(x)$  的右极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 .$$

因为左极限和右极限存在但不相等, 所以当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  的极限不存在.

**定理 1:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  成立的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A .$$

(2) 自变量  $x$  的绝对值  $|x|$  无限增大, 称作  $x$  趋向于无穷大, 记为  $x \rightarrow \infty$ .

**定义 4:** 设函数  $f(x)$  在  $|x|$  大于某一正数  $M$  时有定义, 存在常数  $A$ , 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得  $|x| > M$  时, 所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 或称函数  $f(x)$  收敛于  $A$ , 记作:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

理解为: 设函数  $f(x)$  在  $|x|$  大于某一正数时有定义, 当  $|x| > M$  时, 若函数  $f(x)$  的值无限接近于某一确定常数  $A$ .

1) 自变量  $x$  沿数轴正方向趋于无穷大, 记为  $x \rightarrow +\infty$ .

**定义 5:** 设函数  $f(x)$  在  $x$  大于某一正数  $M$  时有定义, 存在常数  $A$ , 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 使得  $x > M$  时, 所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 或称函数  $f(x)$  收敛于  $A$ , 记作:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

2) 自变量  $x$  沿数轴负方向趋于无穷大, 记为  $x \rightarrow -\infty$ .

**定义 6:** 设函数  $f(x)$  在  $-x$  大于某一正数  $M$  时有定义, 存在常数  $A$ , 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 使得  $-x > M$  时, 所有  $x$  满足  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $A$  是函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow -\infty$  时的极限, 或称函数  $f(x)$  收敛于  $A$ , 记作:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

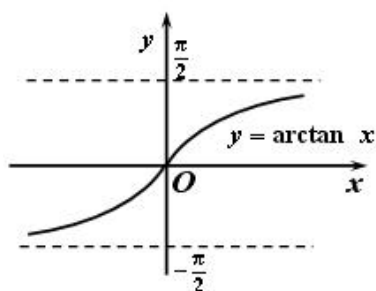
例 3 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $x \rightarrow \infty$  时的极限.

**解:** 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $|x|$  无限增大时,

即在  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  的这两个过程中, 都有对应函数值无限趋于常数 0.

随堂练习 讨论极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  是否存在?

**解:** 由函数  $f(x) = \arctan x$  的基本图形知



讨论: 例 3 先让学生进行讨论, 然后随机抽学生回答相关问题。

随堂练习: 提前在学习通上发布该习题, 学生做好习题后拍照上传可获得相应的课堂积分, 并随即可看到学生的总体情况。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

由于极限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$  都存在, 但不相等, 由定理 2 知, 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在.

**定理 2:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  成立的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

## 2. 函数极限的性质

函数的极限与数列的极限具有一些相似的性质, 这里以  $x \rightarrow x_0$  这种形式为代表来叙述函数的极限一些相应的性质, 至于其它形式的极限的性质只要相应地作适当修改即可.

**性质 1 (唯一性)** 函数有极限则必唯一.

**性质 2 (局部有界性)**

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有界.

若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  存在, 则函数  $f(x)$  在  $|x|$  大于某一正数  $M$  时有界.

**性质 3 (局部保号性)**

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  ( $A < 0$ ), 则在点  $x_0$  的某去心邻域内恒有  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

**推论 1**

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 且  $f(x) \geq g(x)$ , 则在点  $x_0$  的某去心邻域内恒有  $A \geq B$ .

## 三、课程小结

1. 函数极限的定义
2. 函数极限的性质

## 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业
3. 课后思考: 数列极限与函数极限之间的区别与联系?

## 五、板书设计



难点: 函数极限的性质。

课后思考: 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力, 另外, 培养学生对所学知识的归纳能力和对比能力。

## 教学反思

### 1. 成功之处

我尝试引入并融合了更多的教学方法和手段，如案例教学、讨论、问题导向教学、多媒体手段等，这个过程有激发学生的学习兴趣 and 积极性。同时，我也根据学生的学习情况和反馈及时调整了教学过程，以提高教学效果。

### 2. 存在问题

我意识到使用的教学手段虽然直观，但也可能导致学生过于依赖图像而忽视了对数学本质的理解。因此，我需要在教学中平衡好直观与抽象的关系，引导学生深入思考数学本质。

### 3. 改进措施

我将加强对学生学习情况的跟踪和反馈，及时发现问题并进行针对性的辅导。同时，我也会增加练习量和难度，通过多样化的练习形式帮助学生巩固知识并提高解题能力。



授课题目	§1.5 极限的运算法则 §1.6 极限存在准则及两个重要极限	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握极限的运算法则。学生能够熟悉并应用极限的四则运算法则，包括加法、减法、乘法和除法的极限运算法则，以及极限的复合运算法则。 2. 理解极限存在的条件。学生能够理解极限存在的充分必要条件，如夹逼准则、单调有界准则等，并能够运用这些条件判断极限是否存在。 3. 掌握两个重要极限。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的应用计算能力。学生能够熟练运用极限的运算法则进行计算，包括复杂的复合函数极限的计算。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的逻辑思维品质。学生通过对极限的计算，感受数学的神奇之处，体会数学逻辑运算的严密性、严谨性。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 极限的运算法则和重要极限。 <b>教学难点：</b> 极限存在准则（夹逼定理、单调有界数列必收敛）。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计	<pre> graph LR     A[极限的运算法则与极限存在准则及两个重要极限] --&gt; B[导入新课]     A --&gt; C[讲解新知]     A --&gt; D[课程小结]     A --&gt; E[布置作业]     A --&gt; F[板书设计]     A --&gt; G[教学反思]     C --&gt; H[夹逼定理]     C --&gt; I[单调有界数列必有收敛]     C --&gt; J["&lt;math&gt;\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e&lt;/math&gt;"]     C --&gt; K["&lt;math&gt;\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1&lt;/math&gt;"]     H &amp; I &amp; J &amp; K --- L[举例+练习+讲授]           </pre>	
教学过程		教学活动

## 一、导入新课

复习数列极限与函数极限导入新课.

	数列极限	函数极限
定义域	正整数	函数式自身而定
自变量走向	$n \rightarrow \infty$ (正无穷)	$x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$
极限	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\downarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\downarrow$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ $\downarrow$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

## 二、讲解新知

### 1. 极限的四则运算

对于  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时, 下列定理成立

**定理 3:** 设  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$ , 则:

$$(1) \lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$

**推论 1:** 设  $\lim f(x) = A$ ,  $c$  为常数, 则:

$$\lim cf(x) = c(\lim f(x)) = cA$$

**推论 2:** 设  $\lim f_1(x) = A_1$ ,  $\lim f_2(x) = A_2$ ,  $\lim f_3(x) = A_3 \dots$

(有限个), 对应地,  $c_1, c_2, \dots$  为常数, 则:

$$\begin{aligned} & \lim [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] \\ &= c_1 \lim f_1(x) + c_2 \lim f_2(x) + \dots + c_n \lim f_n(x) \\ &= c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n \end{aligned}$$

**推论 3:** 设  $\lim f_1(x) = A_1$ ,  $\lim f_2(x) = A_2$ ,  $\lim f_3(x) = A_3 \dots$

(有限个), 则:

$$\begin{aligned} & \lim [f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] \\ &= \lim f_1(x) \lim f_2(x) \dots \lim f_n(x) \\ &= A_1 A_2 \dots A_n \end{aligned}$$

特别地, 若  $\lim f(x) = A$  存在, 有正整数  $k$ , 则使得,

$$\lim [f(x)]^k = [\lim f(x)]^k = A^k.$$

**例 1** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1)$ .

**解:** 由推论 2、推论 3 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

**技巧 (1):** 求多项式函数当  $x \rightarrow x_0$  的极限时, 只要把  $x_0$  代替函数中的  $x$  就可以.

**例 2** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{3x^3 - 2x^2 + 2}$ .

**解:** 因为

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 - 2x^2 + 2) = 3 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 2 = 18 \neq 0,$$

所以

导入新课: 是将上堂课的课后思考问题进行的解答。利用表格地总结知识点有助于学生快速回顾所学知识。

**重点 1:** 极限的四则运算。

提问: 例 2 的特点是什么?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{3x^3 - 2x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 - 2x^2 + 2)} = \frac{2^2 + 1}{18} = \frac{5}{18}.$$

**技巧 (2) :** 对于求有理分式函数当  $x \rightarrow x_0$  的极限时, 只要带入  $x_0$  后分母不等于 0, 也可直接带入求极限.

随堂练习 1 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ .

**解:** 因为当  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  时, 分子、分母的极限都是零, 所以

$$\begin{aligned} \text{以先对分式进行化简, 有 } \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}, \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  时, 可以约去这个不为零的公因子, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**技巧 (3) :** 对于求有理分式函数当  $x \rightarrow \infty$  的极限时, 分子分母同时除以  $x$  的最高次幂.

**定理 4 (复合函数极限的运算法)**

设复合函数  $y = f[g(x)]$  是由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ , 且  $g(x) \neq u_0$ ,  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ , 则:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$ . (当  $x \rightarrow \infty$  也适用).

推论 ( $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ) 设  $\lim f(x) = A$  ( $A > 0$ ),  $\lim g(x) = B$ , 则:

$$\lim f(x)^{g(x)} = A^B.$$

## 2. 极限存在准则

**定理 1 (单调有界原理)** 单调有界数列必有收敛.

单调递增有上界的数列必有极限, 单调递减有下界的数列必有极限.

**例 3** 设  $a > 0$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}$ .

**证:**

$$\text{单调性: } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \quad \text{单调减少}$$

$$\text{有界性: } a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a} \quad \text{有下界}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a_n} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left( A + \frac{a}{A} \right) \longrightarrow A = \pm \sqrt{a} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}$$

**定理 2 (夹逼定理)** 如果数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$  满足下列条件:

随堂练习 1: 在学习通平台发布, 学生以拍照的方式作答, 方便实时纠正明显错误.

3 个技巧: 在讲授知识的过程中随时总结技巧, 有助于学生提高极限的计算能力.

难点: 极限存在准则.

(1) 自某项起, 有  $b_n \leq a_n \leq c_n$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

那么数列  $\{a_n\}$  极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

例 4 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

解:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq 1$$

### 3. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

例 5 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1. \end{aligned}$$

例 6 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

解: 令  $u = e^x - 1$ , 即  $x = \ln(1+u)$ ,

则当  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ ,

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)},$$

利用例 5 的结果, 可知上述极限为 1,

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证 首先注意到函数  $\frac{\sin x}{x}$  对于一切  $x \neq 0$  都有意义, 并

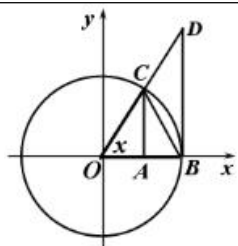
且当  $x$  改变符号时, 函数值的符号不变, 即  $\frac{\sin x}{x}$  是一个偶函

数, 所以只需对  $x$  从右侧接近于零时来论证, 即只需证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ 作单位圆,}$$

例 4: 组织学生先进行观察, 尝试进行放缩找到左右两侧的数列, 鼓励学生大胆尝试。

重点 2: 两个重要极限。



设圆心角  $\angle BOC = x \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ ，过点  $B$  的切线与

$OC$  的延长线相交于  $D$ ，又  $CA \perp OB$ ，由图知：

$\triangle OBC$  的面积  $<$  扇形  $OBC$  的面积  $<$   $\triangle OBD$  的面积，

故  $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$ ，即  $\sin x < x < \tan x$ ，

不等号各边都除以  $\sin x$  ( $\sin x > 0$ )，

得  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$  或  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ，从而

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 \leq 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$ ，根据夹逼准则 2 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ 综上所述, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 7 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

解：令  $u = 3x$ ，则当  $x \rightarrow 0$  时， $u \rightarrow 0$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3 \times 1 = 3.$$

**注意：**如果正弦符号后面的变量与分母的变量相同，且都趋于零，则有

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1, \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1.$$

例 8 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

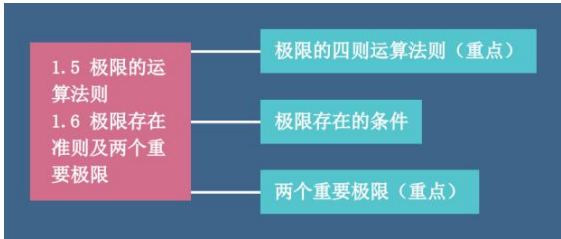
$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left( \frac{x}{2} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

随堂练习 2 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ .

**注意：**提醒学生重要极限的应用不局限在自变量  $x$ 。

随堂练习 2：在学习通平台

<p>解： 令 <math>u = \arcsin x</math>，则 <math>x = \sin u</math>，当 <math>x \rightarrow 0</math> 时，  <math>u \rightarrow 0</math>，所以 <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1</math> .</p> <p>三、课程小结</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 两个重要极限</li> <li>2. 函数极限的定理（夹逼、单调有界必收敛）</li> </ol> <p>四、布置作业</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> </ol> <p>五、板书设计</p> 	<p>发布，学生以拍照的方式作答，方便实时纠正明显错误。</p>
<p style="text-align: center;">教学反思</p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我通过例题和课堂练习，大部分学生能够准确地进行极限运算，表明这一目标基本达成。我利用了多媒体演示、电子手写板板书等现代化教学手段辅助教学，能够帮助学生更好地理解抽象的四则运算和重要极限运算方法。例如，在讲解极限的运算法则时，可以通过一些简单的极限例子，让学生直观地感受法则的应用。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>课堂时间有限，无法让每个学生都充分参与讨论和探究，部分学生的积极性没有得到充分发挥。作业中反映出学生对一些复杂函数的极限计算还存在困难，需要进一步加强练习和辅导。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>针对学生在作业中出现的問題，及时进行反馈和辅导。可以安排专门的答疑时间，或者通过在线平台进行答疑，帮助学生解决学习中遇到的困难。</p>	

授课题目	§ 1.7 无穷小与无穷大	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 能够明确理解无穷小和无穷大的基本概念。在极限的过程中，理解函数值趋近于零或无限增大的情况。 2. 能够理解并掌握无穷小的阶的比较。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的计算与应用能力。学生能够运用无穷小与无穷大求解极限问题，如利用无穷小进行函数的极限化简、利用无穷大判断函数的增长趋势等。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生对古诗词文化的自信以及正确的价值取向。在讲解无穷小时引入中国古诗词，利用诗词再一次让学生感受古人描述无穷小时的意境美，进而让学生充分感受中国古诗词所带给我们的文化是多么值得骄傲，培养学生的文化自信。通过无穷多个无穷小的例子让学生明白团结的力量。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 无穷小和无穷大的性质。 <b>教学难点：</b> 无穷小的阶的比较。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
一、导入新课		



## 二、讲解新知

### 1. 无穷小及其性质

#### (1) 无穷小的定义

若函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时的极限为零，则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时无穷小。

例如：
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{2} = 0$$

**注：**无穷小是一个以 0 为极限的变量，0 是无穷小的唯一常数

#### (2) 无穷小的性质

先试着分析下列问题的结果：

无穷小 + 无穷小 是不是 无穷小？

无穷小 - 无穷小 是不是 无穷小？

无穷小  $\times$  无穷小 是不是 无穷小？

常数  $\times$  无穷小 是不是 无穷小？

无穷小 / 无穷小 是不是 无穷小？

因此，性质有：

1) 有限个无穷小的代数和是无穷小。

2) 有限个无穷小的乘积是无穷小。

3) 无穷小与有界函数的乘积是无穷小。

例 1 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 。

**解：**当  $x \rightarrow 0$  时，函数  $x$  为无穷小，而  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ，即

函数  $\sin \frac{1}{x}$  是有界函数，由性质 2 知， $x \sin \frac{1}{x}$  是  $x \rightarrow 0$  时的

无穷小，故  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

例 2 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ 。

**解：**当  $n \rightarrow \infty$  时，式中每一项都是无穷小，但由于项数随  $n$  增大而不断增加，故不是有限项之和，而是无穷个无穷小之和，因此不能直接利用性质 1，

由于

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1+2+\dots+n-1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n^2-n}{2n^2},$$

课程思政：让学生感受文学与数学的关联，感受数学解释哲理的魅力。

重点 1：无穷小的性质。

课程思政：例 1 无穷多个无穷小之和不一定是无穷小融入课程思政，“勿以善小而为之，勿以恶小而为之”。



所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - n}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

注：无穷多个无穷小之和不一定是无穷小。

(3) 函数极限与无穷小之间存在密切联系。

定理 1:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中,  $\alpha(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  时无穷小.

## 2. 无穷大及其性质

(1) 无穷大的定义

若函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时的绝对值无限增大, 则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时无穷大。

例如:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$        $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

注：无穷大不是一个常数，而是一个变量，且在自变量的某个变化过程中其绝对值无限增大。

(2) 无穷大的性质

先试着分析下列问题的结果：

无穷大 + 无穷大 是不是 无穷大？

无穷大 - 无穷大 是不是 无穷大？

无穷大  $\times$  无穷大 是不是 无穷大？

常数  $\times$  无穷大 是不是 无穷大？

无穷大 / 无穷大 是不是 无穷大？

无穷小  $\times$  无穷大 是不是 无穷大？

因此，性质有：

1) 两个正无穷大量的和是正无穷大量，两个负无穷大量的和是负无穷大量

2) 两个无穷大量的乘积仍是无穷大量

3) 无穷大量与有界函数的代数和仍是无穷大量。

## 3. 无穷大与无穷小之间的关系

定理 2: 在自变量的同一变化过程中，

若  $f(x)$  为无穷大，则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小；

若  $f(x)$  为无穷小，且  $f(x) \neq 0$ ，则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大。

例 3 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$ 。

解：当  $x \rightarrow 1$  时， $x^2 - 1$  是无穷小，由定理 2 知，

$\frac{1}{x^2 - 1}$  是  $x \rightarrow 1$  时的无穷大，即  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$ 。

结论：

$$m = n \quad \longrightarrow \quad \text{极限} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^m + b_1x^{m-1} + \dots}{ax^n + a_1x^{n-1} + \dots} \quad m > n \quad \longrightarrow \quad \text{极限} = \text{无穷大}$$

$$m < n \quad \longrightarrow \quad \text{极限} = \text{无穷小}$$

重点 2: 无穷大的性质。

例 3 给出的结论：通过归纳总结出无穷大比无穷大的极限可能出现的结果，这有助于学生掌握对极限运算的相关方法。

#### 4. 无穷小阶的比较

无穷小的阶的概念:

设  $\alpha$  和  $\beta$  是自变量在同一变化过程中的两个无穷小量, 且  $\alpha \neq 0$ ,

(1) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 则称  $\beta$  是  $\alpha$  的高阶无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;

(2) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 则称  $\beta$  是  $\alpha$  的低阶无穷小;

(3) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 则称  $\beta$  是  $\alpha$  是同阶无穷小;

(4) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 则称  $\beta$  是  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\beta \sim \alpha$ ;

(5) 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 则称  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小.

定理 3: 设  $\alpha \sim \alpha'$ ,  $\beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  存在, 则:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

注: 1) 两个无穷小之比时, 分子、分母可被替换;

2) 分子分母是多个因子的乘积, 其中的因子可被替换.

例 4 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

随堂练习 1 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 5x}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5}.$$

\*\*\*需记住\*\*\*

$x \rightarrow 0$  时, 常用的等价无穷小有:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

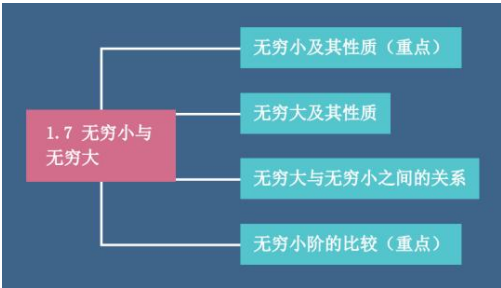
随堂练习 2 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ .

$$\text{解: } \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x}.$$

难点: 无穷小阶的比较 (尤其是等价无穷小)。

随堂练习 1: 发布于学习通平台, 学生作答后拍照上传, 及时纠错。

随堂练习 2: 发布于学习通平台, 学生作答后拍照上传, 及时纠错。

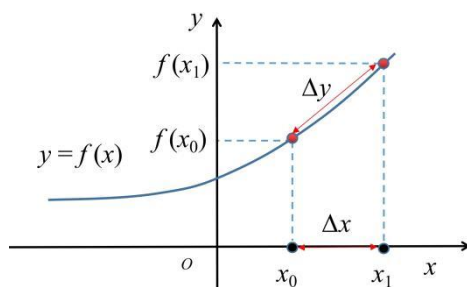
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$ <p>例 5 求 <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \tan x} - 1)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}{(e^x - 1)(1 - \cos x)}.</math></p> <p>解： 利用等价无穷小替换</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \tan x} - 1)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}{(e^x - 1)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{2}}{x \cdot \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}.$ <p>三、课程小结</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 无穷小和无穷大的定义与性质</li> <li>2. 无穷小的比较</li> <li>3. 等价无穷小替换</li> </ol> <p>四、布置作业</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：利用等价无穷小是否可以验证重要极限？</li> </ol> <p>五、板书设计</p> 	<p>课后思考：提出思考题，帮助学生课后自主学习，同时做到及时复习已学知识。</p>
<p style="text-align: center;">教学反思</p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我利用了中国古诗词进行导课，这提升了学生学习的积极性，基本做到了课程思政潜移默化地融入了课堂，实现了润物细无声。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>个别学生已经出现了不按时上课、上课睡觉的情况。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>我计划在未来的教学中更加关注学生的个体差异，采用个性化的教学策略来满足不同学生的需求。例如，我可以为那些理解较慢的学生提供更多的辅导和解释，或者为那些理解较快的学生提供更多的挑战和拓展机会。</p>	

授课题目	§1.8 函数的连续性	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解函数连续性的基本概念、基本性质。 2. 判别间断点，并理解它们与函数连续性的关系。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的推理与证明能力：学生应能使用连续性的定义和性质进行推理和证明，如证明连续函数的某些性质或定理。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的探究精神。鼓励学生对函数连续性进行深入探究，发现其背后的数学规律和原理。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 连续的定义、间断点的判别。 <b>教学难点：</b> 间断点的判别。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 回顾上堂课的知识导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 连续函数的概念</b> 定义 1：设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，当自变量在 $x_0$ 处的增量 $\Delta x$ 趋于零时，函数 $y$ 对应的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 也趋于零，即：		提问：抽学生带领全班同学一同回顾。督促学生快速走进课堂。  重点：连续的定义。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

则称函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 点  $x_0$  称为函数  $y=f(x)$  的连续点。

增量:  $\Delta x$  和  $\Delta y$



**注:**  $\Delta x$  和  $\Delta y$  可为正或负

**例 1** 证明  $y=x^3+1$  在  $x=x_0$  处连续.

**证:** 函数  $y=x^3+1$  在  $x=x_0$  处的增量

$$\Delta y = [(x_0 + \Delta x)^3 + 1] - (x_0^3 + 1) = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

因为  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] = 0$ , 所以

函数  $y=x^3+1$  在  $x=x_0$  处连续.

**推导:**

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 & & \\ \downarrow \Delta x \rightarrow 0 & \downarrow & \\ x = (x_0 + \Delta x) \rightarrow x_0 & \rightarrow & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \\ & & \downarrow \\ & & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}$$

**定义 2:** 设函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 且在点  $x_0$  处的极限值等于该点的函数值, 即:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

称函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

$y=f(x)$  在  $x_0$  处连续的条件:

- 1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义
- 2)  $x \rightarrow x_0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在
- 3) 极限值与函数值相等  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**定义 3:** 设函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  的某左邻域内有定义,

即:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处左连续.

设函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  的某右邻域内有定义, 即:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处右连续.

指导学生推导分析获得连续更简单的定义公式, 从而加深学生对连续的理解。

**定理：**函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处连续的充要条件是：**既左连续又右连续**.

例 2 讨论函数  $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x^{-1}, & x > 1 \end{cases}$  在  $x=0$  和  $x=1$

处连续性.

**解：**在  $x=0$  处,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在, 函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处不连续.

但是,  $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$ , 由  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$  知,

函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处左连续. 在点  $x=1$  处,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1,$$

易知  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ,

而  $f(1) = 1^2 = 1$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ , 所以函数  $f(x)$

在  $x=1$  处连续.

**定义 4：**若函数  $y=f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点都连续, 则称函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续.

若函数  $y=f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点都连续, 且在左端点  $a$  处右连续、右端点  $b$  处左连续, 则称函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续.

例 3 证明函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

**证：**设  $x_0$  为  $(-\infty, +\infty)$  内任意一点, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处取得增量  $\Delta x$  时, 对应的函数增量为

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

因为  $\left|2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 2$ , 而当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\sin \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ ,

根据有界函数与无穷小乘积是无穷小, 得  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ,

因此, 函数  $y = \sin x$  在点  $x_0$  处连续, 由  $x_0$  的任意性, 故函数  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

随堂练习 1 判断函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连

续性.

**解：**无穷小乘以有界函数为无穷小, 因此连续.

## 2. 函数的间断点

**定义 5：**若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处不连续, 则称点  $x_0$  为

**证明：**借助多媒体与电子手写板证明例 3, 清晰地展示证明过程, 通过证明以培养学生的分析与辩证能力.

**随堂练习 1：**发布于学习通平台, 学生作答后拍照上传, 及时纠错.

**重点（也是难点）：**函数的间断点.

函数  $f(x)$  的间断点.

**定义 6: 第一类间断点:** 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左极限和右极限都存在且不等于  $f(x_0)$  或者  $f(x_0)$  没有定义.

**可去间断点:** 左极限和右极限都存在且相等;

**跳跃间断点:** 左右极限存在但不相等.

**定义 7: 第二类间断点:** 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左极限和右极限至少一个不存在.

**无穷间断点:** 至少一个极限为无穷大;

**震荡间断点:** 至少一个极限不存在且非无穷大.

### 3. 连续函数的性质

**性质 1 (连续函数的四则运算)**

若函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则:  $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \times g(x)$ 、 $f(x)/g(x)$  ( $g(x) \neq 0$ ) 在点  $x_0$  处也连续.

**性质 2 (复合函数的连续性)**

设函数  $f[g(x)]$  由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成, 若  $u = g(x)$  在点  $x_0$  连续, 且  $u_0 = g(x_0)$ ,  $y = f(u)$  在点  $u_0$  处连续, 则函数  $f[g(x)]$  在点  $x_0$  连续.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$$

例 4 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

解: 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ ,

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x}} = e.$$

**性质 3 (反函数的连续性)**

严格递增 (或递减) 的连续函数的反函数也是严格递增 (或递减) 的连续函数.

**性质 4 (基本初等函数在其定义域内是连续的.)**

**性质 5 一切初等函数在其定义区间内是连续的.**

### 4. 闭区间上连续函数的性质

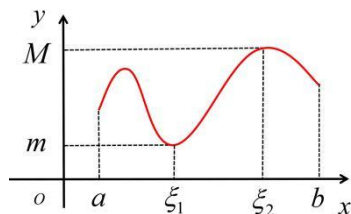
**最大值和最小值定理:**

**定义 1:** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一闭区间  $I$  上有定义, 若存在  $x_0 \in I$ , 使得对于任一  $x_0 \in I$  都有  $f(x) \leq f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是函数  $y = f(x)$  在闭区间  $I$  上的最大值; 若存在  $x_0 \in I$ , 使得对于任一  $x_0 \in I$  都有  $f(x) \geq f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是函数  $y = f(x)$  在闭区间  $I$  上的最小值.

**定理 1:** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在

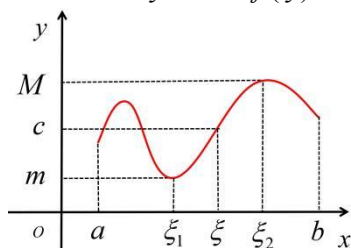
$[a, b]$ 上必有最大值  $M$  和 最小值  $m$  , 即在 $[a, b]$ 上至少存在一点  $\xi_1$  和一点  $\xi_2$  , 使得  $f(\xi_2) = M$  ,  $f(\xi_1) = m$  , 且  $m \leq f(x) \leq M$  ,  $x \in [a, b]$ .

**注:** 此定理对于开区间  $(a, b)$  内的连续函数或在闭区间 $[a, b]$ 上有间断点的函数, 定理的结论未必成立。



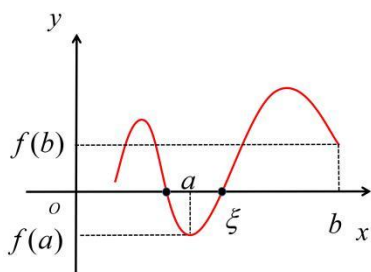
### 定理 2 (介值定理)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在 $[a, b]$ 上必有最大值  $M$  和 最小值  $m$  , 则: 对任意  $c \in [m, M]$  , 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$  , 使得  $f(\xi) = c$  .



### 定理 3 (零点定理)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)f(b) < 0$  , 则在  $(a, b)$  上至少存在一点  $\xi$  , 使得  $f(\xi) = 0$  .



**随堂练习 2** 证明方程  $x^4 - x^2 - 1 = 0$  在  $(1, 2)$  内至少有一个根.

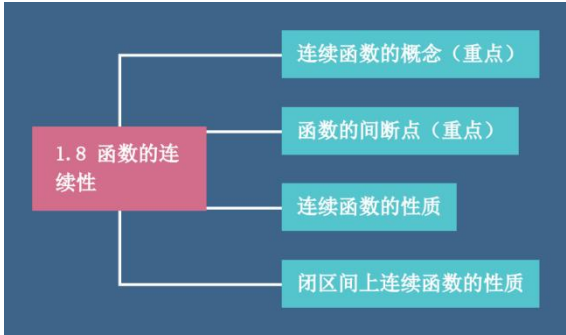
**证:** 设函数  $f(x) = x^4 - x^2 - 1$  , 则  $f(x)$  为初等函数, 且它在 $[1, 2]$ 上连续, 又  $f(1) = -1 < 0$  ,  $f(2) = 11 > 0$  , 根据零点定理, 在区间 $(1, 2)$ 内至少存在一点  $\xi$  , 使得  $f(\xi) = 0$  ,  $\xi \in (1, 2)$  , 即  $\xi^4 - \xi^2 - 1 = 0$  , 这等式说明方程  $x^4 - x^2 - 1 = 0$  在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个根.

### 三、课程小结

1. 函数在某个定点连续的概念和三个条件  
连续: 极限值等于函数值
2. 间断点及其类别的判断 (两大类间断点)
3. 1 个定理 (左右连续) 和 5 个性质的应用

**随堂练习 2:** 发布于学习通平台, 学生作答后拍照上传, 及时纠错指正。

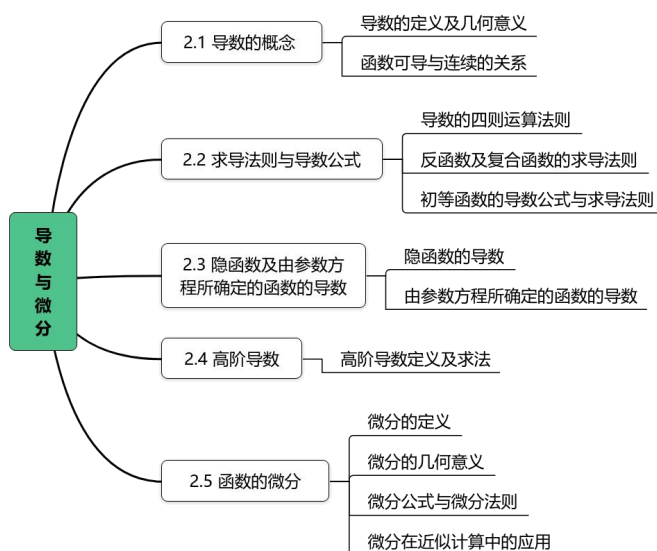


<p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：四种间断点怎么快速记忆其各自的特点？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力，并提醒学生要记住间断的特点，然后进行判别。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在课程内容安排上，我尽量做到了深入浅出，并利用推理分析的方式讲解新的知识，方便学生理解，并能够深刻记住。从课堂互动和课后作业来看，大部分学生对函数连续性的基本概念、性质和间断点知识掌握较好。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>整个课堂上的理论知识偏多，互动性偏少。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在教学方法上，我将尝试引入更多的互动元素，如小组讨论、翻转课堂等，以提高学生的参与度和学习效果。同时，我也可以利用多媒体等现代教学手段，使教学内容更加生动有趣。</p>	

第 2 章 导数与微分

授课题目	§ 2.1 导数的概念	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解导数的概念。学生会使用导数的定义式求函数在给定点的导数值，理解单侧导数，明确导数与连续的关系。 2. 掌握导数的几何意义。学生会求切线方程和法线方程。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生归纳推理能力。通过对导数概念的学习，使学生能够从具体案例中抽象出一般的规律，提高归纳推理能力。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生直观想象素养。通过理解导数的几何意义（即函数在某点的切线斜率），加强学生的直观想象素养，使他们能够借助几何图形理解和分析数学问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 导数的定义、导数的几何意义。 <b>教学难点：</b> 导数与连续的关系。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>第 2 章的章节介绍：</b> 微积分学由微分学与积分学两大部分构成，微分学又分为一元函数微分学与多元函数微分学，导数与微分是微分学中两个最基本的概念。本章研究的是一元函数微分学。首先我们以极限概念为基础，从实际应用问题中引出一元函数的		

导数的概念，然后给出求一元函数导数的基本公式和求导的运算法则，最后介绍微分的概念、求法及其简单的应用。

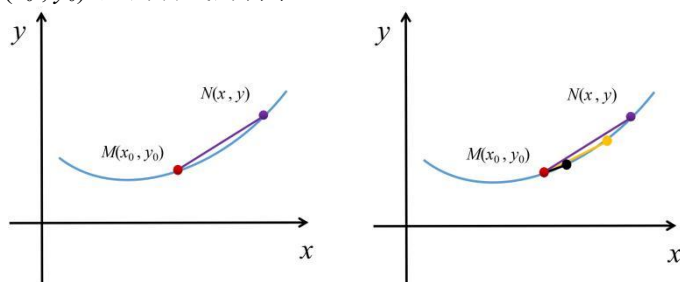


以思维导图的形式展示章节内容，启发学生在学习时要养成逻辑性，要有知识体系，才能清晰本章知识与知识之间的联系。

## 一、导入新课

### 1. 曲线的切线的斜率

设函数  $y=f(x)$  的图形是一条曲线，确定曲线在某点  $M(x_0, y_0)$  处的切线的斜率：



$$k_{MN} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$k_M = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 2. 边际成本

设总成本函数为  $C = C(Q)$ ，当产量  $Q$  有增量  $\Delta Q$  时，成本函数的增量  $\Delta C = C(Q + \Delta Q) - C(Q)$ ，此时，平均成本为，

$$\overline{C(Q)} = \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q} = \frac{\Delta C(Q + \Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q}$$

设产品的产量是连续变化的（可无限划分的），则边际成本就是总成本的变化率

$$\lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C(Q + \Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q}$$

含义：当产生了  $Q$  单位产品时，再增加一个单位产品使总成本增加的数量。

从两个引例可总结：

- 1) 变化率的问题；
- 2) 增量趋于 0；

案例分析：通过具体案例抽象概括出导数的概念，使学生能够认识到导数在社会生活和科学研究中的广泛应用。同时也提升了学生学习导数的兴趣。

3) 相同的结构形式, 增量比的极限.

## 二、讲解新知

### 1. 导数的定义

**定义 1:** 设函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处取得增量  $\Delta x$ , 对应地,  $y$  取得增量  $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x}$$

存在, 则: 称函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处可导, 极限值称为其导数值,

记为  $f'(x_0)$ , 或  $y'|_{x=x_0}$ ,  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ , 即,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x}$$

若  $h = \Delta x$ ,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h}$$

若  $x = x_0 + \Delta x$ ,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$$

均称函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  处可导.

如果函数  $y=f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内的每一点都可导, 则说明  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 对任意的  $x \in (a, b)$  有:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x}$$

称  $f'(x_0)$  为  $f(x)$  导函数 (导数), 记为  $f'(x)$ , 或  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ .

**例 1** 求函数  $f(x) = C$  ( $C$  是常数) 的导数.

$$\text{解: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

即  $(C)' = 0$ .

**例 2** 求函数  $f(x) = x^n$  ( $n \in N^+$ ) 的导数.

**解:** 由定义有

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1}) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

推广: 可得  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . 更一般地, 有  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$  ( $\mu$  为实数).

**例 3** 求函数  $f(x) = \sin x$  的导数

**解:** 由定义有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \end{aligned}$$

**重点 1:** 导数的定义。

**例 1—例 5:** 利用导数的定义求出部分基本初等函数的导数, 利用手写笔在多媒体上一步步演示, 以提高学生对导数的定义公式的熟悉度。

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x.$$

即  $(\sin x)' = \cos x$ . 类似可得  $(\cos x)' = -\sin x$ .

例 4 求函数  $f(x) = e^x$  的导数.

解: 由定义有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = e^x. \end{aligned}$$

即  $(e^x)' = e^x$ . 类似可得  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

例 5 求函数  $f(x) = \ln x$  的导数.

解: 由定义有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{h}{x}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}. \quad \text{即 } (\ln x)' = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**定义 2:** 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的左邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  的左侧取得增量  $\Delta x$ , 对应地,  $y$  取得增量  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则: 称函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  左侧可导, 极限称为左导数. 记为  $f'_-(x_0)$ .

同理, 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的右邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  的右侧取得增量  $\Delta x$ , 对应地,  $y$  取得增量  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则: 称函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  右侧可导, 极限称为右导数. 记为  $f'_+(x_0)$ .

**性质:** 函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导的充要条件是:  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的左导数和右导数都存在且相等, 即  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且在  $a$  点的右导数存在, 在  $b$  点的左导数存在, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  内可导.

例 6 讨论函数  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处的可导性.

解:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

$$\text{由于 } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

因此  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$  不存在, 故  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处不可导.

随堂练习 1 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ 2x^3 & x > 1 \end{cases}$ , 判别  $f(x)$  在  $x = 1$  处是否可导.

$$\begin{aligned} \text{解: 由于 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 6, \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x = 1$  处不可导.

## 2. 函数可导与连续的关系

分析:

函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续是指,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导是指,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

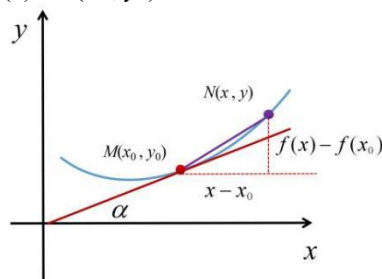
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta y \rightarrow 0$$

**定理:** 函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导可推出函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续. 是充分非必要条件.

## 3. 导数的几何意义

若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的导数为曲线  $f(x)$  在  $(x_0, y_0)$  处的切线的斜率.



**切线方程:**  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

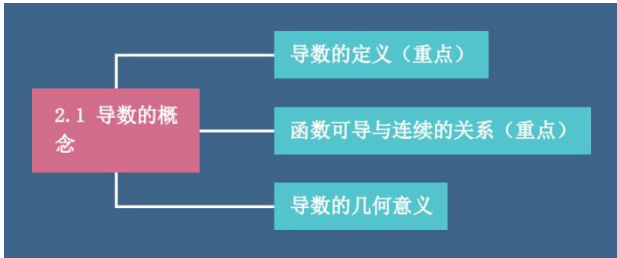
**法线方程:**  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0).$

**随堂练习 1:** 提前将该题目发布到学习通上, 学生作答后发到学习通, 及时点评, 以巩固新知识.

**难点:** 导数与连续的关系.

**重点 2:** 导数的几何意义, 会求切线方程和法线方程.

利用学习通平台抽学生回答, 写出方程需要哪些条

<p>例7 求曲线 <math>y = \frac{1}{x}</math> 在点 <math>(\frac{1}{2}, 2)</math> 处的切线和法线的方程.</p> <p>解: 因为 <math>y' = -\frac{1}{x^2}</math>, 所以曲线 <math>y = \frac{1}{x}</math> 在点 <math>(\frac{1}{2}, 2)</math> 处的切线的斜率为-4, 故切线的方程为 <math>y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})</math>, 即 <math>4x + y - 4 = 0</math>.</p> <p>而法线的斜率 <math>k = \frac{1}{4}</math>, 所以法线的方程为 <math>y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})</math>, 即 <math>2x - 8y + 15 = 0</math>.</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 导数的定义 (常见函数求导)</li> <li>2. 导数与连续的关系</li> <li>3. 导数的几何意义</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考: 函数 <math>\tan x</math> 的求导公式是怎么得到的?</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>件, 以此调动学生的积极互动性。</p> <p>课后思考: 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>利用手写笔在多媒体上讲解相关习题, 使得学生听课的积极性有所提高。课前, 设计了实例进行导入, 激发学生对新知识的渴望, 使学生能够认识到导数在社会生活和科学研究中的广泛应用。同时也提升了学生学习导数的兴趣。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在讲课中, 导数的写法出现了不规范的情况。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后, 将从细节上学习和明确高等数学里的专业名词和表示方式, 以身作则, 避免将来再次出现不规范的情况。通过本次教学反思, 我认识到在导数概念的教学中还存在一些不足之处。另外, 在未来的教学中, 我将更加注重学生的实际需求和学习效果, 努力改进教学方法和手段, 以提高学生的数学素养和综合能力。同时, 我也将不断学习和探索新的教学理念和方法, 以更好地适应教育发展的需要。</p>	

授课题目	§ 2.2 求导法则与导数公式		课时：2 学时
教学目标	知识目标： 1. 熟练掌握基本初等函数的导数公式，包括但不限于常数函数、幂函数、三角函数、指数函数、对数函数等的导数公式。 2. 理解并掌握函数的和、差、积、商的求导法则，能正确应用这些法则求出复杂函数的导数。		
	能力目标： 培养学生分析问题和解决问题的能力。能够通过观察和分析函数的特性，选择合适的求导方法和公式进行求解。		
	素养目标： 培养学生的团队协作和沟通能力。通过小组讨论和合作完成项目等形式，培养学生的团队精神和合作意识。		
重点难点	教学重点：求导法则与导数公式。 教学难点：复合函数和反函数求导法则。		
方法手段	教学方法：讲授法、讨论法、案例分析法。 教学手段：多媒体、学习通平台。		
教学设计	<div><div>求导法则与导数公式</div><div><div>导入新课</div><div>讲解新知<ul style="list-style-type: none"><li>导数的四则运算法则 —— 加减乘除</li><li>复合函数的求导法则 —— 链式法则</li><li>反函数的求导法则 —— 原函数导数的倒数</li><li>初等函数的导数公式与求导法则</li></ul></div><div>课程小结</div><div>布置作业</div><div>板书设计</div><div>教学反思</div></div><div>结合例子启发式 讲授方法+案例 +讨论+随堂练习 自主思考</div></div>		
教学过程		教学活动	
一、导入新课 复习导数的定义导入新课。			
二、讲解新知 1. 函数的和、差、积、商的求导法则 定理 1：设函数 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ 在 $x$ 点可导，则			



$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

$$[cu(x)]' = cu'(x)$$

例 1 讨论函数  $y = \tan x$  和  $y = \cot x$ .

解:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

随堂练习 1 求函数  $y = \sec x$  的导数.

解:

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

同理可得:  $(\cot x)' = -\csc^2 x$ ;  $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ .

例 2 函数  $f(x) = x^3 - 3e^x \cos x + \sin \frac{\pi}{6}$ , 求  $f'(x)$  和  $f'(\pi/2)$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(x) &= 3x^2 - 3(e^x \cos x)' \\ &= 3x^2 - 3(e^x \cos x - e^x \sin x)' \\ &= 3x^2 - 3e^x(\cos x - \sin x). \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 3\frac{\pi^2}{4} - 3e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 + 3e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

例 3 设  $f(x) = x^2 \ln x$ , 求  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1). \end{aligned}$$

例 4 设  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ , 求  $f'(x)$ .

$$\text{解: } f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)'$$

随堂练习 1: 将习题发布于学习通, 学生作答后上传答案, 及时检查学生的做题情况。

$$= \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

## 2. 反函数的求导法则

**定理 2:** 如果函数  $x=f(y)$  在区间  $I_y$  内单调、可导, 且  $f'(y) \neq 0$ , 则: 它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  在区间  $I_x = \{x | x=f(y), y \in I_y\}$  内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

即, 反函数的导数等于原函数导数的倒数.

**例 5** 求函数  $y = \arcsin x$  的导数.

**解:** 设  $x = \sin y$   $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  为直接函数, 其反函数  $y = \arcsin x$ ,

$$\text{由公式 } (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

$$\text{又由于 } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\text{因此 } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{类似可得 } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**讨论:**  $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ 、 $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$  是怎么得到的?

## 3. 复合函数的求导法则

**定理 3:** 设函数  $u=g(x)$  在  $x$  点可导,  $y=f(u)$  在  $u=g(x)$  点可导, 则复合函数  $y=f[g(x)]$  在  $x$  点可导, 导数为,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

设  $y=f(u)$ 、 $u=g(v)$  和  $v=h(x)$  构成复合函数, 导数为:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x) \quad \text{或} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

----- “由外到内的链式法则” -----

**例 6** 求函数  $y = e^{x^3}$  的导数.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = (e^{x^3})' = e^{x^3} (x^3)' = e^{x^3} 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

**重点 1 (也是难点):** 复合函数的求导法则。

**讨论:** 根据例 5 的方法, 组织小范围讨论反余切函数的导数如何获得。

**重点 2 (也是难点):** 复合函数的求导法则。

例7 求函数  $y = (\arctan \sqrt{x})^3$  的导数.

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= 3(\arctan \sqrt{x})^2 (\arctan \sqrt{x})' \\ &= 3(\arctan \sqrt{x})^2 \frac{1}{1+x} (\sqrt{x})' \\ &= \frac{3(\arctan \sqrt{x})^2}{2(1+x)\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

例8 求函数  $y = \ln \cos \frac{1}{x}$  的导数.

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} (\cos \frac{1}{x})' \\ &= \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} (-\sin \frac{1}{x}) (\frac{1}{x})' \\ &= \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

例9 设  $y = f^2(\arctan x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= 2f(\arctan x) [f(\arctan x)]' \\ &= 2f(\arctan x) \cdot f'(\arctan x) \cdot (\arctan x)' \\ &= 2f(\arctan x) \cdot f'(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} f(\arctan x) \cdot f'(\arctan x).\end{aligned}$$

随堂练习2 求函数  $y = \sqrt{f(\sin x^2)}$  的导数.

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= f'(\sin x^2) \cdot (\sin x^2)' \\ &= f'(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' \\ &= 2x \cos x^2 \cdot f'(\sin x^2).\end{aligned}$$

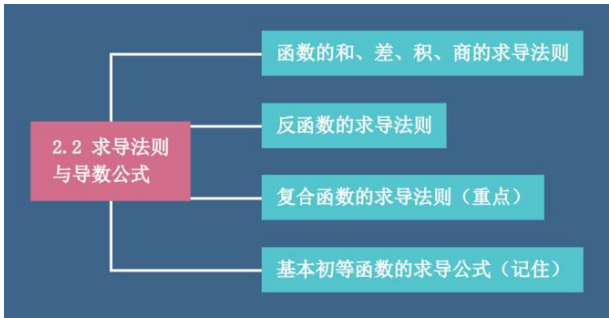
#### 4. 基本初等函数的求导公式

$(C)' = 0$	$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$		
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$		

### 三、课程小结

随堂练习2: 将习题发布于学习通, 学生作答后上传答案, 及时检查学生的做题情况。

重点3: 基本初等函数的求导公式(要求记住)。

<p>1. 导数的四则运算 2. 复合函数导数求导 3. 反函数求导 4. 求导公式</p> <p><b>四、布置作业</b></p> <p>1. 教材的课后习题 2. 学习通上对应的作业 3. 课后要求：记住基本初等函数的求导公式</p> <p><b>五、板书设计</b></p> 	
<p><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>利用手写笔在多媒体上讲解大量的习题，利用讨论的方式加强学生自主学习和思考，利用随堂练习等方式，使得学生对基本求导法则和公式掌握程度良好，能够运用这些法则和公式求解基本函数的导数问题。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>学生回答问题的积极性不见提高，整个课堂缺乏活力。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后，我将关注并私下问询学生的上课情况，采取不同的教学策略，满足不同学生的学习需求。对于学习困难的学生，我将给予更多的关注和帮助，鼓励他们积极参与课堂学习和讨论。</p>	

授课题目	§ 2.3 隐函数及由参数方程确定的函数的导数	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握隐函数求导方法。学生能够熟悉并应用隐函数求导的公式和步骤，包括利用链式法则和方程两边同时对 $x$ 求导的方法。 2. 掌握参数方程确定的函数的导数求法。学生能够掌握通过参数方程求导的方法，包括利用链式法则和参数方程对参数求导后消去参数的方法。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生计算能力。学生能够熟练运用隐函数和参数方程求导的公式和步骤，进行准确的计算。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。通过隐函数和参数方程求导的学习，培养学生的数学逻辑思维和数学推理能力，提高数学素养。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 隐函数及由参数方程确定的函数的导数。 <b>教学难点：</b> 由参数方程确定的函数的导数。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习复合函数求导和求导公式导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 隐函数求导</b> 设 $y=f(x)$ ，是由方程 $F(x, y)=0$ 确定的隐函数，将 $y=f(x)$ 代入方程 $F(x, y)=0$ 中得到恒等式， $F(x, f(x)) \equiv 0$		复习以抽问的方式。  <b>重点 1：</b> 隐函数求导。

则利用复合函数的求导法则，将  $y$  看成是引入的中间变量，对等式两边的自变量  $x$  求导，即可得到  $\frac{dy}{dx}$ 。

实质上， $y$  是关于  $x$  的函数， $F$  就是关于  $x$  的复合函数。

**例 1** 求由方程  $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$  确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ 。

**解：** 将方程两边同时对  $x$  求导，得

$$5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} - 1 - 21x^6 = 0,$$

$$\text{解得：} \frac{dy}{dx} = \frac{21x^6 + 1}{5y^4 + 2}.$$

**例 2** 设  $y = f(x)$  是由方程  $e^y - e^x = xy$  确定的隐函数，求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 。

**解：** 将方程两边同时对  $x$  求导，得

$$e^y y' - e^x = y + xy',$$

$$\text{解得：} \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + y}{e^y - x}.$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=0. \text{ 所以有 } \frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{e^0 + 0}{e^0 - 0} = 1.$$

**例 3** 求  $y = x^{\sin x}$  ( $x > 0$ ) 的导数。

**解：** 等式两边取对数，得

$\ln y = \sin x \cdot \ln x$ ，将方程两边同时对  $x$  求导，得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}, \text{ 于是}$$

$$y' = y \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

例 3 求导数的方法称为**对数求导法**。

**讨论：**  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ ，求  $y'$ 。

**解：** 将方程两边取对数(假定  $x > 4$ )，得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)],$$

上式两端同时对  $x$  求导，得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right), \text{ 于是}$$

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right).$$

## 2. 由参数方程所确定的函数的导数

**例 1-3：** 举例说明，利用电子手写板展示具体过程，具有直观性，督促学生掌握解题技巧。

**讨论：** 组织学生讨论该题的求解方法，并鼓励学生自告奋勇上台为大家做讲解，锻炼学生的叙述能力和逻辑能力。

**重点 2 (也是难点)：** 由参

一般地，参数方程为

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

通过消去  $t$  可确定  $y = y(x)$  或  $x = x(y)$ ，称此函数为该参数方程所确定的函数。

利用复合函数求导法则：

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = v'(t) \frac{1}{u'(t)}$$

例4 求蔓形线  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$  所确定的函数  $y = f(x)$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{3t^2}{1+t^3}\right)'}{\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)'} = \frac{\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

随堂练习 求椭圆曲线  $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  相应点处的切线方程。

$$\text{解: 当 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } x = 2\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

曲线在相应点处的切线的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sin t)'}{(2\cos t)'} \bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos t}{-2\sin t} \bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

于是切线的方程为  $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$ ,

$$\text{即 } x + 2y - 2\sqrt{2} = 0.$$

### 三、课程小结

1. 隐函数求导方法
2. 参数方程确定的函数的求导方法

### 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业
3. 思考：如何求一阶导数的导数？

### 五、板书设计



数方程所确定的函数的导数。

例4 举例说明，利用电子手写板展示具体过程，具有直观性，督促学生掌握解题技巧。

随堂练习：将习题发布于学习通，学生作答后上传答案，及时检查学生的做题情况。

课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。

## 教学反思

### 1. 成功之处

在讲解隐函数和参数方程的概念时，我注重实例的引入，通过具体的例子帮助学生理解这些抽象的概念。在讲解两种函数求导方法时，我注重公式的推导过程，让学生明白每一步的来龙去脉，从而加深对公式的理解和记忆。

### 2. 存在问题

对于难点知识，参数方程求导方法，由于例子和练习偏少，学生理解有难度。

### 3. 改进措施

在今后的教学中，我将更加注重教学方法与策略的选择、课堂互动的加强、练习与反馈的及时性以及教学资源的利用等方面的工作，努力提高学生的学习效果和兴趣。同时，我也将关注学生的个体差异，采取差异化的教学策略，帮助每个学生都能取得进步和成长。



授课题目	§ 2.4 高阶导数	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解高阶导数的定义。 2. 掌握高阶导数的求法。学生能够熟练掌握高阶导数的求导法则，包括链式法则、乘积法则、商法则等在高阶导数中的应用，并能正确求出给定函数的高阶导数。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的计算和逻辑推理能力。学生能够根据高阶导数的定义和性质，进行逻辑推理，理解高阶导数在函数性质分析中的作用。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生持续学习与自我提升意识。培养学生对数学学习的持续兴趣和热情，鼓励他们不断学习和探索新的数学知识，提升自我。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 二阶导数。 <b>教学难点：</b> 参数方程的二阶导数。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习一阶导函数导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 高阶导数的定义</b> <b>定义 1：</b> 一般函数 $y=f(x)$ 的导数是 $y'=f'(x)$ ，仍是关于 $x$ 的函数，若函数 $y'=f'(x)$ 仍可导，则其导数为 $y=f(x)$ 的二阶导数。		抽问参数方程和隐函数的一阶导数的求法。

记作:  $y''$ ;  $f''(x)$ ;  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ;  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = (f'(x))'$$

类似地,

1) 可以得到  $y = f(x)$  的三阶导数  $y^{(3)} = f^{(3)}(x)$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ , 也是  $y' = f'(x)$  的二阶导数;

2) 可以得到  $y = f(x)$  的四阶导数  $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$ ,  $\frac{d^4 y}{dx^4}$ , 也是  $y' = f'(x)$  的三阶导数;

3) 可以得到  $y = f(x)$  的  $n$  阶导数  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , 也是  $y' = f'(x)$  的  $n-1$  阶导数.

“求  $n$  阶导数就是连续对函数求  $n$  次导数”.

例 1 设  $y = x^4 + \sin x$ , 求  $y'''$ .

解:  $y' = 4x^3 + \cos x$ ,

$$y'' = 12x^2 - \sin x,$$

$$y''' = 24x - \cos x.$$

## 2. 二阶导的求法

重点: 二阶导的求法。

例 2 设  $y = e^x \ln x$ , 求  $y''$ .

解:  $y' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right),$

$$y'' = \left[ e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) \right]' = e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) + e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= e^x \left( \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

例 3 求由方程  $e^y = x + y$  所确定的隐函数  $y(x)$  的二阶导数

求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解: 将方程两边同时对  $x$  求导, 得  $e^y y' = 1 + y'$ , 解得

$$y' = \frac{1}{e^y - 1}.$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{e^y - 1} \right) = \frac{0 - e^y \cdot \frac{dy}{dx}}{(e^y - 1)^2} \\ &= \frac{-e^y \cdot \frac{1}{e^y - 1}}{(e^y - 1)^2} = \frac{-e^y}{(e^y - 1)^3}. \end{aligned}$$

例 4 设函数  $y = f(x)$  由方程  $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$  确定, 求

$$\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

解：方法一

将方程两边同时对  $x$  求导，得  $1 - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ,

$$\text{解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{2 - \cos y} \right) = \frac{-2 \sin y \frac{dy}{dx}}{(2 - \cos y)^2} \\ &= \frac{4 \sin y}{(\cos y - 2)^3}. \end{aligned}$$

方法二

将方程两边同时对  $x$  求导，得  $1 - y' + \frac{1}{2} \cos y \cdot y' = 0$ ,

$$\text{解得 } y' = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

两端再对  $x$  求导，得

$$-y'' + \frac{1}{2} [(-\sin y) \cdot y' \cdot y' + \cos y \cdot y''] = 0,$$

$$\text{解得 } y'' = \frac{(y')^2 \sin y}{\cos y - 2},$$

$$\text{所以 } y'' = \frac{\left( \frac{2}{2 - \cos y} \right)^2 \sin y}{\cos y - 2} = \frac{4 \sin y}{(\cos y - 2)^3}.$$

例 5 计算由参数方程  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  所确定的函数

$y = f(x)$  的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解：由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{t}{2}$$

( $t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} \\ &= -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} \end{aligned}$$

( $t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ )

例 2-5: 举例说明，利用电子手写板展示具体过程，具有直观性，督促学生掌握解题技巧。

难点：参数方程的二阶导。

随堂练习 计算由参数方程  $\begin{cases} x=1-t^3 \\ y=t-t^3 \end{cases}$  所确定的函数

$y=f(x)$  的二阶导数  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ .

解: 由于  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{-3t^2} = 1 - \frac{1}{3t^2}$ ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2}{3t^3}}{-3t^2} = -\frac{2}{9t^5}.$$

当  $x=0$  时,  $t=1$  所以  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{2}{9t^5} \Big|_{t=1} = -\frac{2}{9}.$

### 3. 几种常见函数的高阶导数

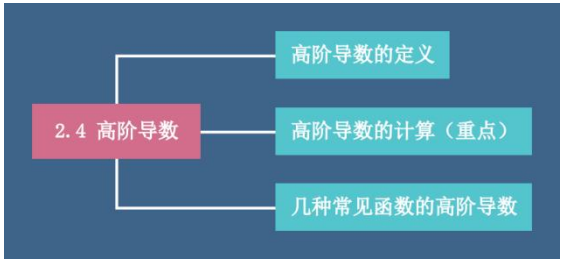
$(e^x)' = e^x$	$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$(e^x)'' = e^x$	$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$(e^x)^{(3)} = e^x$	$(\sin x)^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$(e^x)^{(4)} = e^x$	$(\sin x)^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$(e^x)^{(n)} = e^x$	$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{x+1}$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$(\ln(1+x))'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2}$
$(\ln(1+x))^{(3)} = \frac{1 \cdot 2}{(x+1)^3}$	$(\ln(1+x))^{(3)} = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$
$(\ln(1+x))^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)^4}$	$(\ln(x))^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$
$\vdots$	$\vdots$
$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$	$(\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$x^\mu$ 的 $n$ 阶导数	
$\mu > n$	$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$
	$(x^\mu)'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$
	$(x^\mu)^{(3)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$
	$(x^\mu)^{(4)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4}$
	$\vdots$
	$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$
$\mu = n$	$(x^\mu)^{(n)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$
$\mu < n$	$(x^\mu)^{(n)} = 0$

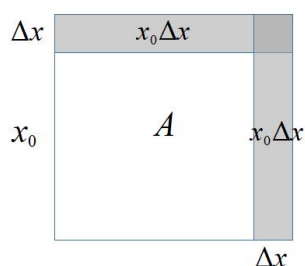
随堂练习: 将习题发布于学习通, 学生作答后上传答案, 及时检查学生的做题情况。

讨论: 第 3 部分内容, 以讨论的方式开展, 组织学生大胆开展讨论, 获得几种常见函数的高阶导数, 从而学生可以更好地理解高阶导数。

<p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 高阶导数的定义</li> <li>2. 二阶求导方法</li> <li>3. <math>n</math> 阶求导方法</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：二阶导数可以计算哪些物理量？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生将所学知识与专业或生活结合起来。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>本次课的讨论增加了学生学习的积极性，大部分学生都参与其中，积极探索知识的过程对于学生的学习指引有着重要的意义。我也积极参与了学生的讨论活动，增进了师生之间的了解和信任。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>参数方程的二阶导对于学生而言，理解比较困难。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后，将对重难点知识的课时占比拉大，考虑学生对知识的需求，以改变备课的内容。另外，我将更加注重与学生的互动和交流，及时回应学生的问题和需求，并鼓励学生提出自己的见解和建议。</p>	

授课题目	§ 2.5 函数的微分	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解微分的概念。学生能够清晰地理解微分的定义并理解微分与导数的关系。 2. 掌握微分的基本公式和计算法则。学生能够熟练掌握微分的基本公式和计算法则。 3. 理解微分的几何意义。学生能够理解微分在几何上的意义。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和估算能力。学生能够分析函数值的变化和微分之间的关系，能选择微分计算公式估算某些函数的值。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生直观想象素养。通过理解微分的几何意义，加强学生的直观想象素养，使他们能够借助几何图形理解和分析数学问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 微分的定义、计算。 <b>教学难点：</b> 微分的计算法则。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 边长为 $x_0$ 的正方形铁片的面积是 $A = x_0^2$ ，加热后边长增加了 $\Delta x$ ，铁片的面积增加了多少？ $\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ 当 $\Delta x$ 非常小时：		<b>案例分析：</b> 导入新课。提高学生的好奇心，从而提高学习兴趣。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A - 2x_0 \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$



$$\Delta A - 2x_0 \Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Delta A = 2x_0 \Delta x + o(\Delta x)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0 \Delta x + o(\Delta x)$$

微分

## 二、讲解新知

### 1. 微分的定义

**定义 1:** 设函数  $f(x)$  在某区间  $I$  内有定义,  $x_0$  和  $x_0 + \Delta x$  也都属于  $I$ , 若函数的增量可表示为,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x)$$

其中  $A$  是与  $\Delta x$  无关的常数, 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微,  $A \Delta x$  称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的微分, 记作:  $dy = A \Delta x$ .

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x)$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x})$$



$$= A$$

函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导:  $f'(x_0) = A$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$



$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$



$$= f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微:  $dy = f'(x_0) \Delta x$

**定理 1:** 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微的充要条件是: 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导

$$dy = f'(x_0) \Delta x$$

函数  $f(x)$  在任意的  $x$  处可微的充要条件是: 函数  $f(x)$  在任意的  $x$  处可导:

$$dy = f'(x) \Delta x$$

特别地, 函数  $y = x$  的微分

重点 1: 微分的定义。

$$dy = dx = \Delta x \quad (\text{自变量的微分})$$

因此, 函数  $f(x)$  的微分可记作:

$$dy = f'(x)dx$$

例 1 求函数  $y = x^2$  在  $x = 1$  和  $x = 3$  的微分.

解: 由于  $y' = 2x$ , 故  $y'|_{x=1} = 2$ ,  $y'|_{x=3} = 6$ . 所以函数  $y = x^2$  在  $x = 1$  的微分为  $dy = 2\Delta x$ ; 函数  $y = x^2$  在  $x = 3$  的微分为  $dy = 6\Delta x$ .

例 2 求函数  $y = x^3$ , 当  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0.02$  的微分.

解: 由于  $y' = 3x^2$ , 于是有  $dy = 3x^2\Delta x$ , 当  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0.02$  时,

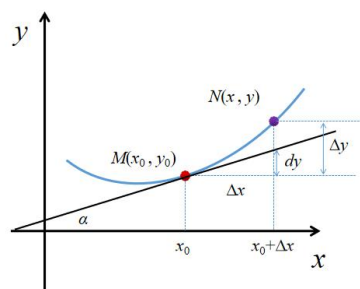
$$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 12 \times 0.02 = 0.24.$$

## 2. 微分的几何意义

设函数  $y = f(x)$ , 当自变量从  $x$  增加到  $x + \Delta x$  时, 相应的函数值增量为,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x)\Delta x$$

$dy = \tan \alpha \Delta x$  是函数图像切线的增量



## 3. 微分公式与微分法则

微分公式:  $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$  计算微分实质计算导数, 因此, 其运算法则与导数相对应.

(1) 基本初等函数的微分公式:

$$d(C) = 0$$

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \quad d(\csc x) = -\csc x \cot x \tan x dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

(2) 函数的和、差、积、商的微分法则:

例 2: 让学生观察获得结论, 微分可帮助我们估算函数的值。

重点 2 (也是难点): 微分的计算——微分公式与微分法则。



$$d(u \pm v) = du + dv$$

$$d(u \cdot v) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

$$d(Cu) = C \cdot du$$

### (3) 复合函数的微分法则:

若函数  $y = f(u)$  和  $u = g(x)$  都可微,

则: 复合函数  $y = f[g(x)]$  可微

$$dy = f'(u)g'(x)dx$$

$$du = g'(x)dx$$

$$dy = f'(u)du$$

#### 先微外再微内

例 3 设  $y = \sin(2x+1)$ , 求  $dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } dy &= d \sin(2x+1) = \cos(2x+1)d(2x+1) \\ &= \cos(2x+1)d2x = 2\cos(2x+1)dx. \end{aligned}$$

例 4 设  $y = \ln(1+e^x)$ , 求  $dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } dy &= d \ln(1+e^x) = \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x) \\ &= \frac{1}{1+e^x}de^x = \frac{e^x}{1+e^x}dx. \end{aligned}$$

例 5 设  $y = \frac{e^{-x}}{x^2}$ , 求  $dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } dy &= d\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right) = \frac{x^2 d(e^{-x}) - e^{-x} d(x^2)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 e^{-x} d(-x) - e^{-x} 2x dx}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 e^{-x} dx - e^{-x} 2x dx}{x^4} \\ &= \frac{-e^{-x}(x+2)}{x^3} dx. \end{aligned}$$

随堂练习 设  $xy + e^y = 0$ , 求  $dy$ .

解: 方程两端同时对  $x$  求微分, 得  $d(xy) + d(e^y) = 0$ , 即

$$ydx + xdy = -e^y dy, \quad ydx = -e^y dy - xdy,$$

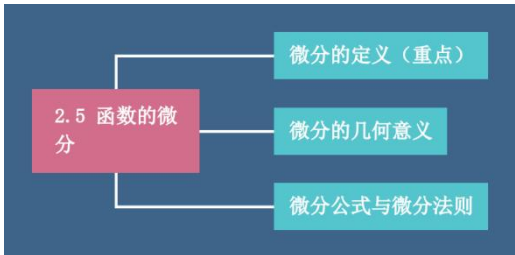
$$\text{所以 } dy = -\frac{y}{e^y + x}.$$

### 三、课程小结

1. 微分的定义
2. 基本的微分公式
3. 复合函数的微分

例 3-5: 学生可以先求导再求微分。

随堂练习: 将习题发布于学习通, 学生作答后上传答案, 及时检查学生的做题情况。

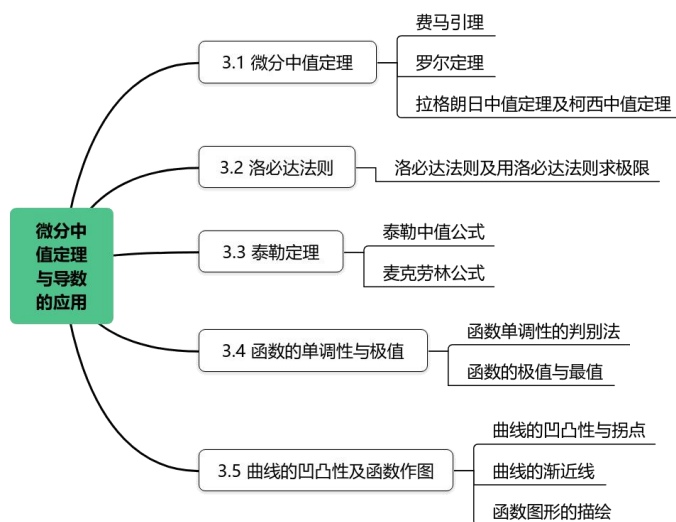
<p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：导数与微分有哪些应用？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考和探索的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在本节课中，我利用讲授法和案例分析法系统地介绍微分的基本概念和计算法则，适当的练习法能够帮助学生巩固所学知识，这有利于学生对知识的掌握。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>我发现部分学生在课堂上的参与度不高，这可能是因为他们对微分的理解不够深入或者对教学方法不感兴趣。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后教学中，我需要更加注重课堂互动和学生参与，通过提问、讨论等方式激发学生的学习兴趣 and 主动性。同时，我也会积极寻求外部资源支持，如邀请专家进行讲座、组织线上学习交流等，以丰富教学内容和形式。</p>	

### 第3章 微分中值定理与导数的应用

授课题目	§ 3.1 微分中值定理	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握微分中值定理。学生理解并记忆微分中值定理的基本概念和定义，包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理等。 2. 理解微分中值定理的推导方法。学生理解微分中值定理的推导过程，了解其在数学分析中的应用。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生解决实际问题的能力。通过学习和实践，培养学生运用微分中值定理解决实际问题的能力。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生联系的、辩证统一的思想。通过微分中值定理的学习，培养学生从联系的观点看问题，理解数学知识之间的内在联系和辩证统一。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 罗尔定理、拉格朗日中值定理。 <b>教学难点：</b> 拉格朗日中值定理的证明和应用。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计	<pre> graph LR     A[微分中值定理] --- B[第3章的章节介绍]     A --- C[导入新课]     A --- D[讲解新知]     A --- E[课程小结]     A --- F[布置作业]     A --- G[板书设计]     A --- H[教学反思]     D --- I[费马引理]     D --- J[罗尔定理]     D --- K[拉格朗日中值定理及柯西中值定理]     I --- L[讲授+结合例子启发式教学方法、说明三者关系]     J --- L     K --- L           </pre>	
教学过程		教学活动
<b>第3章的章节介绍：</b> 在上一章我们研究了导数的概念及其求法，事实上，导		

数作为函数的变化率，在研究函数性态中起着重要的作用，因而在自然科学、工程技术、经济及管理等领域都有广泛的应用。

本章内容是上一章的延续，主要介绍利用导数来讨论函数的性质。微分中值定理是讨论函数性质的有效工具，本章首先从中值定理入手，在此基础上，介绍计算极限的另一种有效方法——洛必达法则。而后介绍泰勒公式，并以导数为工具研究函数的性态。



## 一、导入新课

复习导数导入新课.

## 二、讲解新知

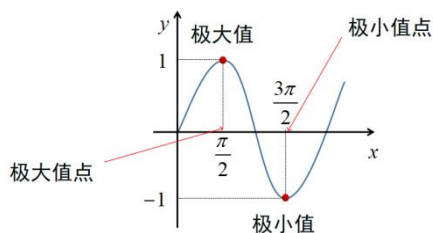
### 1. 罗尔定理

**定义 1:** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义，如果对于该邻域内任何异于  $x_0$  的点  $x$ ，总有， $f(x) \leq f(x_0)$ ，则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的极大值。

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义，如果对于该邻域内任何异于  $x_0$  的点  $x$ ，总有， $f(x) \geq f(x_0)$ ，则称  $f(x_0)$  为函数  $f(x)$  的极小值。

极大值和极小值统称为极值；极值对应的点称为极值点。

观察函数  $f(x) = \sin x$  在  $[0, 2\pi]$  的图像：



**费马引理:**

若函数  $f(x)$  满足:

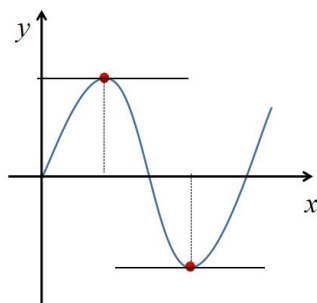
1) 点  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点;

以思维导图的形式展示章节内容，启发学生在学习中学要养成逻辑性，要有知识体系，才能清晰知识与知识之间的联系。

**重点 1:** 罗尔定理。

2)  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导

则  $f'(x_0) = 0$



证明:

已知点  $x_0$  是  $f(x)$  在邻域  $U(x_0)$  的极大值,  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则可得

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x < 0: \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Delta x > 0: \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

极限的保号性

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

同理可证极小值点的导数值为 0。

**定义 2:** 导数为零的点, 称其为函数的驻点, 或 稳定点、临界点。

从而费马引理可简述为: **可导函数的极值点必为驻点。但驻点不一定是极值点!**

费马引理的几何意义为: 如果连续曲线在局部最高点或最低点存在切线, 且该切线不垂直于  $x$  轴, 则必平行于  $x$  轴。

**罗尔定理:** 若函数  $f(x)$  满足:

1) 在  $[a, b]$  上连续;

2) 在  $(a, b)$  上可导;

3) 在区间端点处的函数值相等, 即:  $f(a) = f(b)$ ;

则: 在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

证明: 已知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则必存在最大值  $M$  和最小值  $m$ ;

若  $M = m$ : 则  $f(x) = m$  为常数函数, 在开区间  $(a, b)$  上恒有  $f'(x) = 0$ ;

若  $M \neq m$ : 则  $M$  和  $m$  至少有一个不等于函数在区间

讨论: 组织学生讨论极值点一定是驻点吗? 驻点一定是极值点吗? 培养学生的辩证能力。

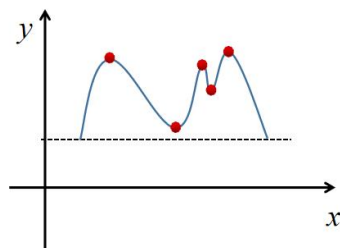
端点的值, 设  $M \neq f(a)$  (或  $f(b)$ ), 则  $M$  为极大值, 取  $f(\xi) = M$ ,

由费马引理可知  $f'(\xi) = 0$ .

同理可证  $m \neq f(a)$  (或  $f(b)$ ).

几何意义:

如果端点对应的纵坐标相等的连续曲线, 且除端点外处处具有不与  $x$  轴垂直的切线, 那么该曲线上至少存在一点, 使得该点处的切线平行于  $x$  轴。



例 1 验证罗尔定理对函数  $y = \ln \sin x$  在区间  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上的正确性.

证: (1)  $f(x) = \ln \sin x$  的定义域为

$$2k\pi < x < 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z}).$$

因为初等函数在定义域区间内连续, 所以该函数在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上连续;

(2)  $f'(x) = \cot x$  在  $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$  内处处存在, 说明  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$  内可导;

$$(3) f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = -\ln 2.$$

所以函数在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上满足罗尔定理的条件.

$$f'(x) = \cot x = 0 \text{ 在 } (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \text{ 内显然有解 } x = \frac{\pi}{2}, \text{ 故可}$$

取  $\xi = \frac{\pi}{2}$ , 有  $f'(\xi) = 0$ . 即函数在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上满足罗尔定理的结论.

例 2  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  不需求导, 判断  $f'(x) = 0$  的实根个数及这些实根所在的范围.

解: 显然, 函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  和  $[2, 3]$  上都满足闭区间连续, 开区间可导, 且  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ , 满足罗尔定理的条件. 于是, 至少存在点  $\xi_1 \in (1, 2), \xi_2 \in (2, 3)$ , 使得

例 1-2: 利用学习通平台抽学生回答, 写出方程需要哪些条件, 以此调动学生的积极互动性。

$$f'(\xi_1)=0, f'(\xi_2)=0,$$

即方程  $f'(x)=0$  至少有两个实根.

又因为  $f(x)$  是一个三次多项式, 则  $f'(x)=0$  是一个二次方程, 最多有两个实根.

综上,  $f'(x)=0$  有两个实根, 分别在区间  $(1,2)$  和  $(2,3)$  内.

## 2. 拉格朗日中值定理

**拉格朗日中值定理:** 若函数  $f(x)$  满足:

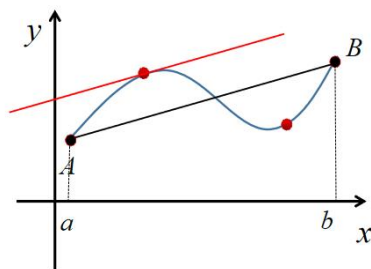
- 1) 在  $[a, b]$  上连续;
- 2) 在  $(a, b)$  上可导;

则: 在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

几何意义:

如果连续曲线  $f(x)$  除端点  $A, B$  以外, 处处具有不与  $x$  轴垂直的切线, 那么该曲线上除端点以外至少有一点, 使得该点处的切线平行于割线  $AB$ .



**注意:**

若  $f(a)=f(b)$ , 拉格朗日中值定理就成为罗尔定理!!

证明: 设辅助函数为  $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$   $x \in [a, b]$

$\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导

根据罗尔定理可知, 至少存在一点  $\xi$ , 使得  $\varphi'(\xi)=0$

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

例 3 设  $a>b>0$ , 证明  $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ .

证: 令  $f(x)=\ln x$ , 显然  $f(x)$  在  $[b, a]$  上连续, 在  $(b, a)$  内可导, 于是有

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \xi \in (b, a),$$

$$\text{即 } \ln\frac{a}{b}=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

**重点 2 (难点):** 拉格朗日中值定理的证明和应用。

**例 3-4:** 通过例子的分析讲解, 提高学生对拉格朗日定理的理解力。

由于  $b < \xi < a$ ，故  $\frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{b}$ ，

所以  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ 。

**推论** 若函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的导数恒为零，则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为常数函数。

**证明：** 任取  $x_1, x_2 \in (a, b)$

则根据拉格朗日中值定理：

在开区间  $(b, a)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

**例 4** 证明  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} (-\infty < x < +\infty)$

**证：** 令  $f(x) = \arcsin x + \arccos x (-\infty < x < +\infty)$ ，  
则  $f'(x) = 0$ ，

根据拉格朗日中值定理的推论，有  $f(x) = C$ 。

又因为  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ ，故  $f(x) = \frac{\pi}{2} (-\infty < x < +\infty)$ 。

### 3. 柯西定理

**柯西定理：** 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  满足：

- 1) 在  $[a, b]$  上连续；
- 2) 在  $(a, b)$  上可导；
- 3) 对任意的  $x \in (a, b)$ ， $g'(x) \neq 0$

则在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

若  $g(x) = x$ ，柯西定理就成了拉格朗日中值定理，所以，柯西定理是拉格朗日中值定理的推广。

### 三、课程小结

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西定理

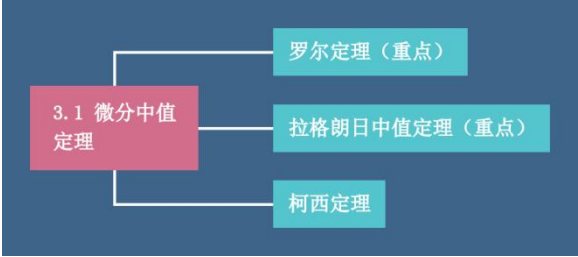
### 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业
3. 思考：罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西定理之间的联系？

### 五、板书设计

课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力和分析归纳的能力。



	
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>利用手写笔在多媒体上讲解相关证明习题，可培养学生的推理性和逻辑性。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>本节课的知识具有较强的理论性，重点知识讲解的时间占比偏少。另外，知识的应用说明偏少。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的教学过程中，我有时会因为讲解某个细节而花费过多时间，导致整体教学节奏偏慢。为了改进这一点，我需要更加注重教学节奏的把控，合理安排每个环节的时间。另外，我将查阅更多资料，收集知识的应用性，与学生的专业结合起来。</p>	

授课题目	§ 3.2 洛必达法则	课时：2 学时
教学目标	<p><b>知识目标：</b></p> <p>1. 理解洛必达法则的基本概念。学生应明确洛必达法则是求解未定型极限的有效方法之一，并理解其适用范围。</p> <p>2. 掌握洛必达法则的运算条件。学生应了解洛必达法则的使用条件，包括分子分母的极限都等于零（或无穷大）及在限定的区域内两者都可导。</p> <p><b>能力目标：</b></p> <p>培养学生分析和判断能力。学生应能够分析和判断一个问题是否适用于洛必达法则，包括判断极限是否为零或无穷大，以及函数在特定点是否可导。</p> <p><b>素养目标：</b></p> <p>培养学生数学素养。通过学习洛必达法则，学生能够计算相关极限，具备逻辑思维和推理能力，能够理性分析和解决问题，数学素养进一步得到提高。</p>	
重点难点	<p><b>教学重点：</b> <math>\frac{0}{0}</math> 和 <math>\frac{\infty}{\infty}</math> 型未定式的计算。</p> <p><b>教学难点：</b> <math>\frac{0}{0}</math> 和 <math>\frac{\infty}{\infty}</math> 型未定式的计算。</p>	
方法手段	<p><b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。</p> <p><b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。</p>	
教学设计	<pre> graph LR     A[洛必达法则] --- B[导入新课]     A --- C[讲解新知]     A --- D[课程小结]     A --- E[布置作业]     A --- F[板书设计]     A --- G[教学反思]     C --- H[洛必达法则]     C --- I[转化为洛必达法则未定式求极限]     C --- J[讲授+结合例子启发式教学方法+随堂练习自主思考] </pre>	
教学过程		教学活动
<p><b>一、导入新课</b></p> <p>复习导数和极限知识导入新课.</p>		

## 二、讲解新知

### 1. $\frac{0}{0}$ 型未定式

**定理 1:** 在一定条件下通过分子分母分别求导来确定未定式定值的方法称为洛必达法则.

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

(2)  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  的某个邻域 (点  $x_0$  除外) 可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \text{ 为有限数, 也可为 } +\infty \text{ 或 } -\infty)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

**证明:** 由于要讨论的是函数在点  $x_0$  的极限, 故与函数在该点  $x_0$  的值无关, 所以可补充  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  的定义, 且对问题讨论没有影响. 令  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  在点连续, 在点  $x_0$  的附近任取一点, 并应用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

由于  $x \rightarrow x_0$  时  $\xi \rightarrow x_0$ , 所以, 对上式取极限即证.

**注意:** 上述定理对  $x \rightarrow \infty$  时的未定型 “ $\frac{0}{0}$ ” 同样有用, 对

$x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$  时的未定型 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 也有相应的法则.

### 2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

$$\text{定理 2: } (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

(2)  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  的某个邻域 (点  $x_0$  除外) 可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \text{ 为有限数, 也可为 } +\infty \text{ 或 } -\infty)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

例 1 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ .

解

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

重点 1 (也是难点):  $\frac{0}{0}$  型未定式的计算。

重点 2 (也是难点):  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式的计算。

例2 求  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan x}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0.$$

例3 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{-1}{x^2}} = 1.$$

例4 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

例5 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \frac{1}{x} + \ln x - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

随堂练习1 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能用法则求解.

解: 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$  所以极限为 1;

又 因 为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) \text{ 不存在,}$$

所给极限不能用洛必达求出.

随堂练习2 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{\sin x(1 - \cos x)}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{\sin x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x}{x \frac{x^2}{2}} = 2.$$

随堂练习 1-2:

利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

### 3. 其他类型的未定式

除了  $\frac{0}{0}$  型和  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式外,  $0 \cdot \infty$  型、 $\infty - \infty$  型、 $0^0$  型、 $1^\infty$  型以及  $\infty^0$  型的未定式一般也可以通过恒等变形化为  $\frac{0}{0}$  型和  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式后应用洛必达法则定值.

#### (1) $0 \cdot \infty$ 型未定式

一般地, 如果  $f(x) \cdot g(x)$  为  $0 \cdot \infty$  型未定式, 可以通过恒等变形将其化为  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$  ( $\frac{0}{0}$  型) 或  $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  ( $\frac{\infty}{\infty}$  型) 而后利用洛必达法则.

洛必达法则.

例 6 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ .

分析: 题目为  $0 \cdot \infty$  型极限, 用洛必达法则.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

注 一般地, 对数函数和反三角函数不“下放”.

#### (2) $\infty - \infty$ 型未定式

$\infty - \infty$  型未定式一般可以通过通分或者根式有理化化为  $\frac{0}{0}$  型和  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式而后应用洛必达法则定值.

例 7 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

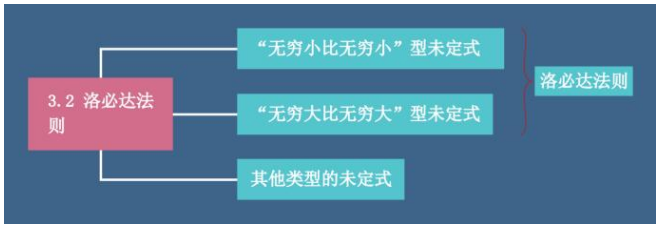
分析: 题目为  $\infty - \infty$  型极限, 用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### (3) $0^0$ 型、 $1^\infty$ 型以及 $\infty^0$ 型未定式

诸如  $0^0$  型、 $1^\infty$  型以及  $\infty^0$  型等幂指函数的未定式, 可以通过对数恒等式的方法定值, 即  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ .

例 8 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

<p>解： <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1</math> .</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>洛必达法则：0/0 型或<math>\infty/\infty</math>型未定式.</li> <li><math>0^0</math> , <math>1^\infty</math> , <math>\infty^0</math> , <math>0 \cdot \infty</math> 等未定式转化为洛必达法则.</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>教材的课后习题</li> <li>学习通上对应的作业</li> <li>思考：在什么情况下不建议使用洛必达法则？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生自觉养成去回顾已学知识的习惯。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在洛必达法则的教学中，我注重了内容的深度和广度。根据柯西定理的推理详细介绍了洛必达法则的来源、适用条件、推导过程以及应用方法，同时也拓展了一些相关的知识点，如未定型的极限类型、函数的可导性等。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>通过练习方式，我发现部分学生在应用洛必达法则求解未定型极限时，总是忽略判断使用洛必达法则的条件。其他类型的未定式的相关例题讲解的偏少，导致学生做题存在困难。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在后续的教学，我会加强对学生练习的监督和指导，帮助他们更好地掌握和应用洛必达法则，养成较好的数学素养。另外，加大其他类型的未定式的相关例题量，注重练习，让学生在练习中掌握新知识。</p>	

授课题目	§ 3.3 泰勒定理	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 掌握泰勒定理的推导过程。学生应能够熟悉泰勒定理的推导过程，理解如何通过无限次求导和取极限来逼近一个函数。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生计算与推理能力。运用利用泰勒多项式求出逼近函数的特定值或求解方程的近似解。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生直观想象素养。通过学习泰勒定理的推导过程和应用，培养学生的逻辑思维和推理能力，使其能够独立思考和解决问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 麦克劳林展开式。 <b>教学难点：</b> 利用麦克劳林展开式进行近似值计算。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习微分： $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 泰勒公式</b> 设函数 $f(x)$ 在含有 $x_0$ 的开区间 $(a, b)$ 内具有直到 $n+1$ 阶导数，是否存在关于 $(x - x_0)$ 的 $n$ 次多项式函数： $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$ 可用其近似表达函数 $f(x)$ ，即 $f(x) \approx p_n(x)$ ，且要求 $p_n(x)$		提问：随机抽问，提高学生的 学习积极性。

与  $f(x)$  之间的误差是比  $(x-x_0)^n$  高阶的无穷小, 并给出  $|f(x)-p_n(x)|$  的具体表达式.

为解决这个问题, 我们考虑这种情形:

假设  $p_n(x_0)=f(x_0)$ ,

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)(k=1,2,\cdots,n)$$

其中  $f(x_0), f^{(k)}(x_0)(k=1,2,\cdots,n)$  为已知.

对多项式求各阶导数, 之后分别代入上述各式可确定多项式的系数  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ ,

$$a_0=f(x_0), a_1=f'(x_0), a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0), \cdots, a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

由此可得多项式函数为,

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

**定义 1** 称上式为  $f(x)$  在点  $x_0$  处按  $(x-x_0)$  的幂展开的  $n$  阶泰勒 (Taylor) 多项式,  $p_n(x)$  的各项系数  $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(k=0,1,2,\cdots,n)$  称为泰勒系数.

**定理 1 (泰勒中值定理):** 若函数  $f(x)$  在包含  $x_0$  的区间  $(a,b)$  内具有直到  $n+1$  阶的导数, 则当  $x\in(a,b)$  时,  $f(x)$  可表示为  $(x-x_0)$  的一个多项式  $p_n(x)$  与一个余项  $R_n(x)$  之和,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

其中,  $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  ( $\xi$  介于  $x_0$  与  $x$  之间).

**定义 2:** 称公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

为  $f(x)$  在点  $x_0$  处按  $(x-x_0)$  的幂展开的  $n$  阶泰勒公式,

称表达式  $R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  为拉格朗日型余项. 所以也

称该公式为带拉格朗日型余项的泰勒公式.

当  $n=0$  时, 上述公式变成拉格朗日中值公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此, 泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

由泰勒中值定理可知,  $|R_n(x)|$  即为用多项式  $p_n(x)$  来近似代替函数  $f(x)$  时所产生的误差. 现在来考查误差的大小.

提问: 利用学习通平台抽学生回答, 求出这个系数需要怎么做, 以此调动学生的积极互动性.



若对于某个固定的  $n$ ，当  $x \in (a, b)$  时， $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ ，则有估计式：

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1},$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

故当  $x \rightarrow x_0$  时， $R_n(x)$  是比  $(x-x_0)^n$  高阶的无穷小，即  $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ 。

至此，我们之前提出的问题已经全部得到解决。

在不需要余项的精确表达时， $n$  阶泰勒公式可以写成

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \end{aligned}$$

**定义 3:** 称  $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$  为佩亚诺 (Peano) 型余项，称上式为  $f(x)$  在点  $x_0$  处按  $(x-x_0)$  的幂展开的带佩亚诺型余项的  $n$  阶泰勒公式。

## 2. 麦克劳林公式

在泰勒公式中，若取  $x_0 = 0$ ，即可把函数  $f(x)$  展开成  $x$  的幂次的多项式，

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \end{aligned}$$

为函数  $f(x)$  按  $x$  的幂展开的带拉格朗日型余项的  $n$  阶麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

为函数  $f(x)$  按  $x$  的幂展开的带佩亚诺型余项的  $n$  阶麦克劳林公式。

此时，相应的误差估计式变成

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

由于  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间，所以公式还可以写成：

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

**例 1** 写出函数  $f(x) = e^x$  的带佩亚诺型余项的  $n$  阶麦克劳林公式。

**解：** 因为  $f^{(k)}(x) = e^x$ ，故  $f^{(k)}(0) = 1, k = 1, 2, \dots, n$ ，

代入公式得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

例2 写出函数  $f(x) = \cos x$  的带佩亚诺型余项的  $2m$  阶麦克劳林公式.

解: 因为  $f^{(k)}(x) = \cos(x + k \cdot \frac{\pi}{2}), k = 0, 1, 2, \dots$ , 故

$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, f^{(2k+1)}(0) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ , 代入公式 (3.3.11) 得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m}).$$

说明: 由于多项式满足  $p_{2m}(x) = p_{2m+1}(x)$ , 因此上述展开式中余项可以写作  $o(x^{2m})$ , 也可以写作  $o(x^{2m+1})$ , 所以  $\cos x$  的带佩亚诺型余项的  $2m$  阶麦克劳林公式也可以写作

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

同理可求其他函数的麦克劳林公式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m});$$

$$\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

实际应用中, 上述公式常用来间接展开一些复杂函数的麦克劳林公式以及求某些函数的极限等.

例3 写出函数  $f(x) = \frac{1}{3-x}$  在  $x=2$  处的泰勒展开式.

解: 由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-2)} \\ &= 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n + o[(x-2)^n]. \end{aligned}$$

例4 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ .

解: 由于

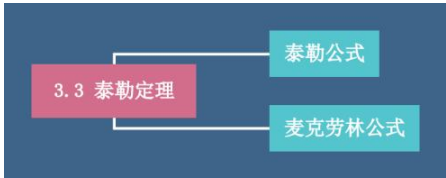
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

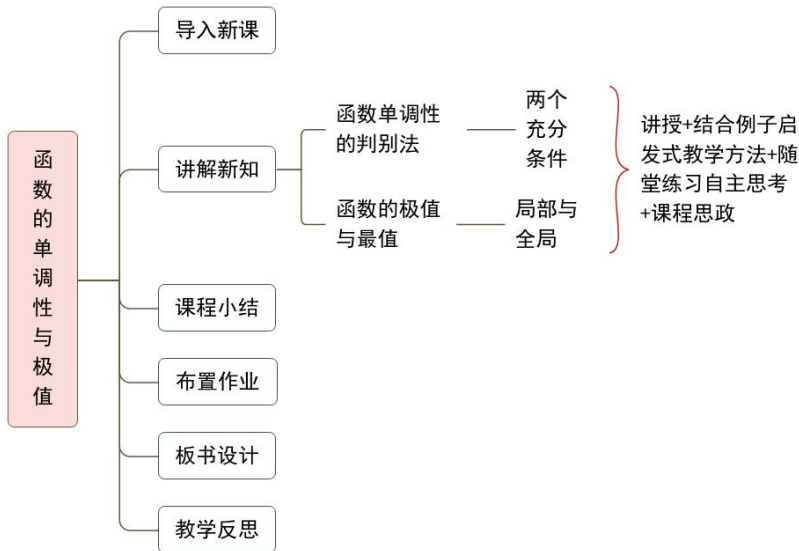
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4),$$

$$\text{故原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

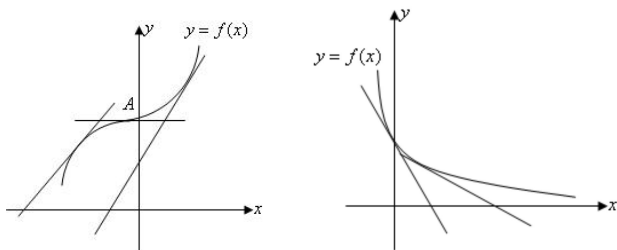
组织讨论: 如何利用麦克劳林公式求极限? 与等价无穷小有何联系?

重点: 函数的麦克劳林展开公式.

<p>随堂练习 求 <math>\sqrt[3]{28}</math> 的近似值.</p> <p>解: 用二阶麦克劳林公式计算, 由于</p> $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2,$ <p>所以原式变为</p> $= 3 \left( 1 + \frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 3 \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \cdot \left( \frac{1}{27} \right)^2 \right] = 3.03657.$ <p>三、课程小结</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 麦克劳林展开</li> <li>2. 常用的麦克劳林公式</li> <li>3. 近似计算的应用</li> </ol> <p>四、布置作业</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> </ol> <p>五、板书设计</p> 	<p>随堂练习: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。</p> <p>难点: 利用麦克劳林公式进行近似值计算。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p> <p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在教学过程中, 我努力确保学生理解泰勒定理的基本概念、推导过程以及应用方法, 发现学生有恍然大悟的感受, 说明讲授的逻辑性是及其重要的, 带学生深入到课堂中来。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>本节课的知识点——泰勒公式比较长, 而板书空间有限, 导致后排的学生无法清晰跟上讲解的速度。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的教学中, 我需要更加注重教学方法的灵活性, 根据学生的实际情况和学习特点, 采用多种教学方法相结合的方式, 以激发学生的学习兴趣 and 积极性。</p>	

授课题目	§ 3.4 函数的单调性与极值	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握基本概念。理解函数单调性的定义，包括单调增函数和单调减函数的定义。掌握极值的概念，理解极值点的定义和性质。 2. 掌握判定方法。学会利用导数判断函数的单调性。熟练掌握求函数极值的方法，包括一阶导数法和二阶导数法。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生分析与应用能力。能够利用函数的单调性解决一些实际问题，如比较大小、判断不等式等。能够利用函数的极值解决实际问题，如优化问题、极值问题等。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生科学素养并具备正确人生态度。培养学生仔细观察、善于思考、勇于创新的科学素养。根据函数极值最值呈现的图像，将其看作人生，有起有伏，正确看待人生的起起落落。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 函数的单调性与极值。 <b>教学难点：</b> 函数极值的判别方法。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习函数的性质导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 函数单调性的判别法</b>		复习以提问的方式进行。

从几何上直观来看，前一幅图中所示的函数单调递增，不难看出曲线上任一点的切线与  $x$  轴正向的夹角锐角或平行于  $x$  轴，即曲线在任一点的斜率均为正数或零。后一幅图中所示的函数单调递减，曲线在任一点的斜率均小于或等于零。



**定理 1:** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  可导，则有

(1) 如果在  $(a, b)$  内  $f'(x) > 0$ ，则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增；

(2) 如果在  $(a, b)$  内  $f'(x) < 0$ ，则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减；

定理中闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），结论也成立。

**例 1** 判断函数  $y = x^2$  的单调性。

**解:** 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ，由  $y' = 2x$  得驻点为  $x = 0$ 。

当  $x > 0$  时， $y' > 0$ ，因此  $y = x^2$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加；

当  $x < 0$  时， $y' < 0$ ，因此  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上单调减少。

$x = 0$  是  $y = x^2$  单调区间的分界点，这里  $x = 0$  是函数  $y = x^2$  的驻点。

**例 2** 讨论函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  的单调性。

**解:** 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。函数的导数为

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, x \neq 0 \quad (\text{当 } x = 0 \text{ 时函数的导数不存在}).$$

当  $x > 0$  时， $y' > 0$ ，因此函数在  $[0, +\infty)$  上单调增加；

当  $x < 0$  时， $y' < 0$ ，因此  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上单调减少。

$x = 0$  是  $y = \sqrt[3]{x^2}$  单调区间的分界点，这里  $x = 0$  是函数  $y = \sqrt[3]{x^2}$  的一阶不可导点。

函数单调区间的分界点包括驻点和不可导点。

**将求函数单调区间的步骤总结如下：**

1) 求出  $f(x)$  的定义域；

2) 求出  $f(x)$  定义域内的所有驻点和不可导点；

3) 用上述点将定义域分成若干小区间

4) 讨论在各小区间  $f'(x)$  的符号，从而判定  $f(x)$  在各小区间的单调性。

**例 3** 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3$  的单调性。

**解:** 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。令  $f'(x) = 0$ ，

**重点：**函数的单调性的判断。

与学生一起总结步骤，培养学生的分析与归纳能力。

得  $x_1=1, x_2=4$ ,  $x_1, x_2$  将  $(-\infty, +\infty)$  分成三个区间,  $(-\infty, 1), (1, 4), (4, +\infty)$ .

当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 因此函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 1]$  内单调增加;

当  $x \in (1, 4)$  时,  $f'(x) < 0$ , 因此函数  $f(x)$  在  $[1, 4]$  内单调减少;

当  $x \in (4, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 因此函数  $f(x)$  在  $[4, +\infty)$  内单调增加.

也可以通过下述表格进行讨论:

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增		递减		递增

**随堂练习 1** 讨论函数  $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 36x$  的单调性.

解: 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 - 6x + 36$$

由  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 2$ . 列表如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	递减		递增		递减		递增

于是, 函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -1]$  及  $[\frac{3}{2}, 2]$  单调减少, 在区间  $[-1, \frac{3}{2}]$  及  $[2, +\infty)$  单调增加.

## 2. 函数的极值

回顾: **极值的定义**

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内有定义, 且对此邻域内任意一点  $x (x \neq x_0)$ , 均有  $f(x) < f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极大值; 同样, 如果对此邻域内的任一点  $x (x \neq x_0)$ , 均有  $f(x) > f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的一个极小值. 函数  $f(x)$  的极大值与极小值统称为极值, 使函数取得极值的点  $x_0$ , 称为极值点.

**注意:**

1) 极值在一个区间上可能不唯一, 极大值也有可能小于极小值;

2) 极值的概念是局部性的, 它与最值不同;

3) 可导函数在极值处的切线是水平的, 即极值点处导数

**随堂练习 1:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误.

**重点 (也是难点):** 函数的极值.

**提问:** 利用学习通平台抽学生回答, 函数极值的定义是什么.

为 0, 所以  $f'(x)=0$ .

**定理（极值的必要条件）**

设函数在点处具有导数, 且在点处取得极值, 则  $f'(x)=0$

**注意:**

- 1) 极值点必为驻点, 反之不真.
- 2) 极值点可能是导数不存在的点, 称之为尖点.

**定理 1:** (第一充分条件) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 在点的某一个空心邻域内可导, 当  $x$  由小到大经过点  $x_0$  时, 如果

- 1)  $f'(x)$  由正变负, 那么  $x_0$  是函数  $f(x)$  极大值点;
- 2)  $f'(x)$  由负变正, 那么  $x_0$  是函数  $f(x)$  极小值点;
- 3)  $f'(x)$  不变号, 那么  $x_0$  不是极值点.

证明: 1) 由假设知,  $f(x)$  在  $x_0$  的左侧邻近单调递增, 在  $x_0$  的右侧单调递减, 即当  $x < x_0$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x > x_0$  时,  $f(x) > f(x_0)$ , 因此是  $f(x)$  的极大值点,  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值. 类似地, 可证 2); 3) 由于不变号, 所以  $f(x)$  是单调的, 因此不是极值点.

**定理 2 (第二充分条件):** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有二阶导数且  $f'(x)=0, f''(x) \neq 0$

- 1) 如果  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极大值;
- 2) 如果  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极小值.

**例 4** 求函数  $f(x)=x^3-6x^2+9x$  的极值.

**解法 1:** 因为  $f(x)=x^3-6x^2+9x$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ .

令  $f'(x)=0$ , 得驻点为  $x_1=1, x_2=3$ .

在  $(-\infty, 1)$  内,  $f'(x) > 0$  在  $(1, 3)$  内,  $f'(x) < 0$  故  $f(1)=4$  为函数  $f(x)$  的极大值. 同理知  $f(3)=0$  为  $f(x)$  极小值.

**解法 2:** 因为  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

且  $f'(x)=3x^2-12x+9, f''(x)=6x-12$ ,

令  $f'(x)=0$ , 得驻点为  $x_1=1, x_2=3$ .

又因为  $f''(1)=-6 < 0$ , 所以  $f(1)=4$  为极大值,

$f''(3)=6 > 0$  所以,  $f(3)=0$  为极小值.

**随堂练习 2** 求函数  $f(x)=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$  的极值。

**解:** 因为  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且在  $(-\infty, +\infty)$

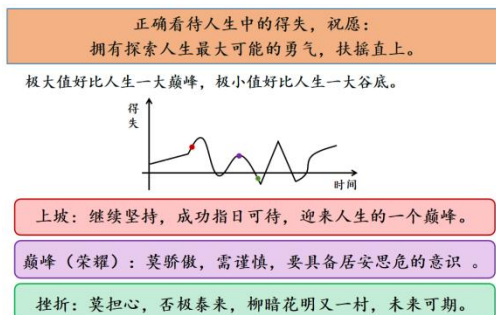
上连续, 且  $f'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}(x \neq 1)$ .

$x=1$  时,  $f'(x)$  不存在, 所以  $x=1$  为  $f(x)$  的可能极值点. 在  $(-\infty, 1)$  内,  $f'(x) > 0$  在  $(1, +\infty)$  内,  $f'(x) < 0$ , 故在  $x=1$  处取得极大值  $f(1)=2$ .

**3、函数的最值**

**随堂练习 2:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

我们知道在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值，这在理论上肯定了最值的存在性，但是怎么求出函数的最值呢？首先假设函数的最大（小）值在开区间 $(a, b)$ 内取得，那么最大（小）值也一定是函数的极大（小）值，由上节的分析知道，使函数取得极值的点一定是函数的驻点或导数不存在的点。另外函数的最值也可能在区间端点上取得。因此我们只需把函数的驻点、导数不存在的点及区间端点的函数值一一算出，并加以比较，便可求得函数的最值。



### 最大值与最小值

(1) 某些优先问题可归结为求函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的最大值与最小值，求连续函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上最大（小）值的一般步骤是：

- 1) 求出  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的全部的驻点与不可导点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- 2) 计算出函数值  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ; 以及  $f(a)$  与  $f(b)$ ;
- 3) 比较上述值的大小.

(2) 有关最大（小）值的应用问题，其关键是建立目标函数。该函数的实际意义下的定义域称为约束集或可行域。

$f(x)$  在约束  $I$  内的驻点唯一，又根据问题的实际意义知  $f(x)$  的最大（小）值存在，则该驻点即为最大（小）值点，不必另行判定。

例 5 求函数  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  在  $[-3, 4]$  上的最值。

解：因为  $f(x)$  在  $[-3, 4]$  上连续，所以在该区间上存在最大和最小值。

又因为  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -2, x_2 = 1$ ,

由于  $f(-2) = 20, f(1) = -7, f(-3) = 9, f(4) = 128$  比较各值，可得  $f(x)$  最大值为 128，最小值为 -7。

随堂练习 3 有一块宽为  $2a$  的长方形铁皮，将宽的两个边缘向上折起，做成一个开口水槽，其横截面为矩形，高为  $x$ ，问高  $x$  取何值时水槽的流量最大。

解：设两边各折起，则横截面积为  $s(x) = 2x(a-x)$  ( $0 < x < a$ )，由于  $s'(x) = 2a - 4x$ ，所以，令  $s'(x) = 0$ ，得驻点为

$x = \frac{a}{2}$ ，由实际意义，其最大值在  $x = \frac{a}{2}$  时取得，所以当

$x = \frac{a}{2}$  时，流量最大。

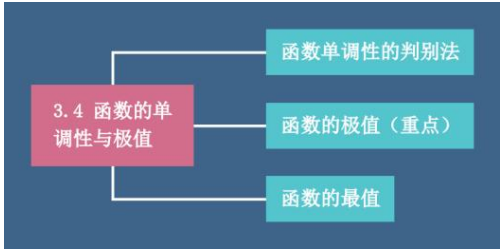
注意：掌握求函数的最大值和最小值的方法，会求实际

组织讨论：最值与极值的区别与联系？

课程思政：人生就像极值，有起有落，正确看待人生中的诸多得失。

随堂练习 3：利用学习通平台发布习题，学生作答后上传答案及时批改，并对存在典型错误的学生指出问题，同时警示其他同学避免出现相同错误。培养学生的应用能力。



<p>问题中的最值，不要将极大（极小）值与最大（最小）值混为一谈，要懂得它们的区别和联系。</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 单调性的判别</li> <li>2. 极值的求法</li> <li>3. 最值的求法</li> <li>4. 极值与最值的区别</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：什么情况下求极值不能用第二充分条件？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生自觉养成去回顾已学知识的习惯。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>（1）利用随堂练习的时间，走入学生位置，对个别学生进行了指导和点拨。</p> <p>（2）课程思政的融入做到了润物细无声，部分学生受到了鼓舞。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>由于学生习惯利用手机搜索答案，不认真对待随堂练习，这样导致对学生的学习和掌握情况了解不到位。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在未来的教学中，我需要更加注重评价与反馈的及时性，通过作业批改、课堂测验、小组讨论等方式，及时了解学生的学习情况，并给予他们有针对性的指导和建议。</p>	

授课题目	§ 3.5 曲线的凹凸性及函数作图	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解曲线的凹凸性定义。学生应能明确什么是曲线的凹（上凹）和凸（下凹），了解拐点是连续曲线弧上凹弧与凸弧的分界点。 2. 掌握曲线凹凸性的判定方法。学生应学会利用二阶导数符号来判断曲线的凹凸性。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析与计算能力。通过分析和计算函数的二阶导数，判断函数的凹凸性，并应用此知识解决相关问题。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的科学素养。培养学生的科学思维，使他们能够用数学的语言和工具描述、解释和预测自然现象和社会问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 凹凸性和拐点的判别方法、渐近线。 <b>教学难点：</b> 凹凸性的判别方法。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b>  复习函数的单调性和极值导入新课，提出问题：若两个函数皆是单调增加，那增加的快慢怎么确定？ 前面我们已经讨论过函数的单调性，几何上它反映的是函数图形的升降情况。但在研究函数图形时，只知道这些是不够的。如函数 $y = x^2$ 和 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上的曲线，		学生自由回答该问题，发挥想象力、分析力，由此导出新课，提高学生的学习兴趣。

都是单调增加的,但它们图形的差别是明显的。下面我们利用导数研究曲线的凹凸性及判别法。

## 二、讲解新知

### 1. 曲线的凹凸性与拐点

**定义 1:** 如果在某区间内, 曲线上每一点的切线都位于该曲线的下方, 则称曲线在该区间内是向上凹的 (或向下凸的); 如果曲线上每一点的切线都位于该曲线的上方, 则称曲线在该区间内是向下凹的 (或向上凸的)。

可以理解为, 曲线  $y=f(x)$  上任意两点的割线在曲线下方 (上) 面, 则  $y=f(x)$  是凸 (凹) 的。

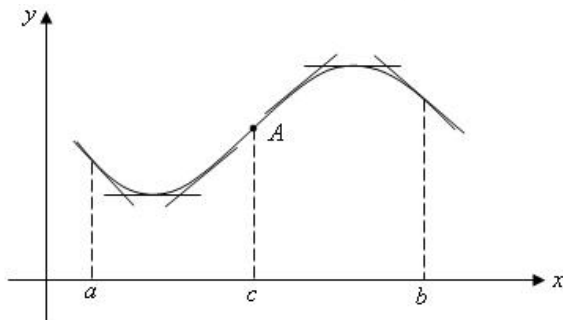
下面不加证明地给出曲线凹凸性的判别法:

**定理 1:** 设函数  $y=f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内具有二阶导数,

(1) 若在  $(a, b)$  内,  $f''(x) > 0$  则曲线  $y=f(x)$  在  $(a, b)$  内是上凹的;

(2) 若在  $(a, b)$  内,  $f''(x) < 0$  则曲线  $y=f(x)$  在  $(a, b)$  内是下凹的。

**注:** 可从一阶导数的单调性加以考察。



**例 1** 判定曲线  $y=\ln x$  的凹凸性。

**解:** 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $y'=\frac{1}{x}$ ,  $y''=-\frac{1}{x^2}$

当  $x > 0$  时,  $y'' < 0$ , 故  $y=\ln x$  在  $(0, +\infty)$  内是向下凹的。

**定义 2:** 若连续函数  $f(x)$  的点  $P$  是曲线上凹和下凸的分界点, 则称点  $P$  是曲线的拐点。

由于拐点是曲线凹性的分界点, 则在拐点两侧近旁必  $f''(x)$  异号. 故拐点  $x_0$  横坐标只能是使  $f''(x)=0$  的点或是  $f''(x)$  不存在的点。

所以可得其求法: 设函数  $y=f(x)$  在  $(a, b)$  连续:

1) 先求出  $f''(x)$ , 找出在  $(a, b)$  内使  $f''(x)=0$  的点和  $f''(x)$  不存在的点;

2) 用上述点将  $(a, b)$  分成若干小区间, 再在每个小区间上考察  $f''(x)$  的符号;

3) 若在某点  $x_i$  两侧近旁异号, 则该点是拐点, 否则不是。

**随堂练习** 求曲线  $y=x^3$  的凹向及拐点, 并画草图。

**解:** 因为  $y=x^3$  定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

且  $y'=3x^2$ ,  $y''=6x$

**重点 1 (也是难点):** 曲线的凹凸性与拐点。

利用学习通平台抽学生回答, “若要用已学的知识判定凹凸性, 同学们能想到哪个知识点”, 以此调动学生的积极互动性。

**随堂练习:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典

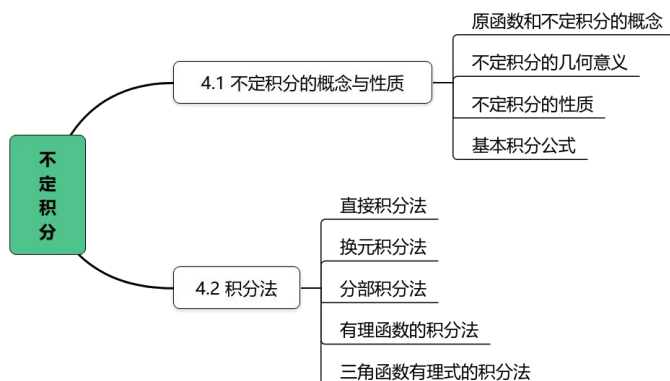
<p>令 <math>y''=0</math> 得 <math>x=0</math>.  用 <math>x=0</math> 将 <math>(-\infty,+\infty)</math> 分成两小区间 <math>(-\infty,0), (0,+\infty)</math>.  当 <math>x \in (-\infty,0)</math> 时, 曲线 <math>y=x^3</math> 下凹,  当 <math>x \in (0,+\infty)</math> 时, 曲线 <math>y=x^3</math> 上凹,  所以, 点 <math>x=0</math> 为 <math>y=x^3</math> 拐点.</p> <p><b>2. 曲线的渐近线</b></p> <p><b>定义 3:</b> 若曲线 <math>C</math> 上的动点 <math>P</math> 沿着曲线无限地远离原点时, 点 <math>P</math> 与某一固定直线 <math>L</math> 的距离趋近于零, 则称 <math>L</math> 为曲线 <math>C</math> 的渐近线并不是任何曲线都有渐近线.  下面分三种情况进行讨论:</p> <p><b>(1) 斜渐近线</b>  <b>定理 2</b> 若满足:  (1) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k</math>;  (2) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b</math>  则曲线 <math>y=f(x)</math> 有斜渐近线为 <math>y=kx+b</math>.</p> <p><b>例 2</b> 求曲线 <math>y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}</math> 的斜渐近线.</p> <p><b>解:</b> 令 <math>f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}</math>, 因为  <math display="block">k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]</math> <math display="block">= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3} - x \right) = -2</math> 所以斜渐近线为 <math>y = x - 2</math>.</p> <p><b>(2) 铅直渐近线</b>  <b>定义 4:</b> 若 <math>x \rightarrow C</math> 时 (有时仅当 <math>x \rightarrow C^+</math> 或 <math>x \rightarrow C^-</math>), 称直线 <math>x=C</math> 为曲线 <math>y=f(x)</math> 的铅直渐近线, (其中 <math>C</math> 为常数).</p> <p><b>(3) 水平渐近线</b>  <b>定义 5:</b> 若当 <math>x \rightarrow \infty</math> 时, <math>f(x) \rightarrow C</math> (<math>C</math> 为常数), 则称水平渐近线 <math>y=C</math>.  <b>注:</b> 这是斜渐近线为零的特殊情况.</p> <p><b>3. 函数图形的描绘</b></p> <p>一般地, 可以按照如下步骤描绘函数图形:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 求出函数的定义域, 判定函数的奇偶性和周期性;</li> <li>(2) 求出一阶导数和驻点, 确定导数不存的点, 再根据导数的符号找出函数的单调区间与极值;</li> <li>(3) 求出二阶导数及其零点和不存在的点, 再根据二阶导数的符号找出曲线的凹凸区间及拐点;</li> <li>(4) 求出曲线的渐近线;</li> <li>(5) 将上述“增减、极值、凹凸、拐”等特性综合列表, 必要时可用补充曲线上某些特殊点 (如与坐标轴的交点), 依据表中性态作出函数的图形.</li> </ol>	<p>型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。培养学生的应用能力。</p> <p><b>重点 2:</b> 曲线的渐近线。</p> <p><b>第 3 部分内容</b>提高学生的动手绘图能力, 从而提高数学素养。</p>
--	---

<p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 曲线的凹凸性和拐点的定义</li> <li>2. 曲线的水平、垂直渐近线</li> <li>3. 函数图形描绘的主要步骤和方法</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：哪些点可能成为拐点？拐点和极值点在形式上有什么区别？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p>	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去复习已学的知识。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在讲解函数的凹凸性时，我采用了比较密集的问答互动方式，督促到了学生学习的专注度，也同时激发了学生的学习兴趣 and 参与度。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在课后，发现部分学生容易混淆“二阶导数大于零时为凹，小于零时为凸”这个判别结果。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后，我将利用小技巧让学生更容易记住相关结论，比如大于零，为正，“正”这个字上面比较平整，就对应了“凹”，而小于零，为负，“负”这个字上面突出了一撇，就对应了“凸”。</p>	

## 第 4 章 不定积分

授课题目	§ 4.1 不定积分的概念与性质	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握不定积分的定义。学生能够明确知道一个函数 $f$ 的不定积分 $F$ 是一个导数等于 $f$ 的函数，即 $F' = f$ 。 2. 理解不定积分的性质。学生能够熟悉并理解不定积分的基本性质。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的逻辑思维能力。通过不定积分的学习，学生能够锻炼和提高自己的逻辑思维能力，特别是在理解和应用不定积分的性质和公式时。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生逆向思维意识。不定积分与导数互为逆运算，学生能够通过学习不定积分，锻炼和提升自己的逆向思维意识。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 不定积分的定义、性质。 <b>教学难点：</b> 不定积分的性质。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计	<pre>           graph LR             A[不定积分的概念与性质] --- B[第4章的章节介绍]             A --- C[导入新课]             A --- D[讲解新知]             A --- E[课程小结]             A --- F[布置作业]             A --- G[板书设计]             A --- H[教学反思]             D --- I[原函数和不定积分的概念]             D --- J[不定积分的几何意义]             D --- K[不定积分的性质]             D --- L[基本积分公式]             I --- M[讲授+结合例子启发式教学+讨论等方法+随堂练习自主思考]             J --- M             K --- M             L --- M           </pre>	
教学过程		教学活动
<b>第 4 章的章节介绍：</b> 前面我们已经研究了一元函数的微分学，而在实际问题中，往往会遇到相反的问题。比如：已知某质点以速度 $v = t^3$ 作变速直线运动，求该质点的运动方程；又如：已知一过原点的平面曲线上任一点处的切线斜率为 $2x$ ，求该曲线的方		

程。这两个问题都可归结为同一类问题——已知某一个函数  $f(x)$ ，求函数  $F(x)$ ，使  $F'(x) = f(x)$ 。象这样的问题就是积分学所要研究的基本问题。本章主要讲述不定积分的概念、性质及其基本积分方法。



以思维导图的形式展示章节内容，启发学生在学习中学要养成逻辑性，要有知识体系，才能清晰知识与知识之间的联系。

## 一、导入新课

思考与讨论：怎么找到一个导函数的原函数，与学过的哪个知识息息相关？

## 二、讲解新知

### 1. 原函数和不定积分的定义

#### (1) 原函数的概念

**定义 1:** 设  $f(x)$  是定义在某区间的已知函数，若存在函数  $F(x)$ ，使得  $F'(x) = f(x)$  或  $dF(x) = f(x)dx$ ，则称  $F(x)$  为  $f(x)$  的一个原函数。

例如：  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  故  $\ln x$  是  $\frac{1}{x}$  的一个原函数；

$x^2$  是  $2x$  的一个原函数；

但  $(x^2 + 1)' = (x^2 + 2)' = (x^2 + 3)' = \dots = 2x$ ，所以的原函数不是唯一的。

关于原函数的两点说明：

1) 如果  $f(x)$  在某区间连续，那么它的原函数一定存在。

2) 原函数的统一表达式有如下结论：

**定理** 若  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数，则  $F(x) + C$  是  $f(x)$  的全部原函数，其中  $C$  为任意常数。

#### (2) 不定积分的概念

**定义 2** 函数  $f(x)$  的全体原函数叫做  $f(x)$  的不定积分，记为

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ 其中 } F'(x) = f(x).$$

例 1 求下列不定积分

$$(1) \int x^2 dx; \quad (2) \int \frac{1}{x} dx.$$

组织学生讨论：怎么找到一个导函数的原函数，与学过的哪个知识息息相关？并利用学习通让学生抢答问题，对积极的学生加适当的课堂积分。

**重点：**原函数与不定积分的定义。

解：（1）因为  $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ，所以  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ 。

（2）因为  $x > 0$  时， $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ，又  $x < 0$  时， $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ ，所以  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 。

例2 设曲线过点  $(1, 2)$  且斜率为  $2x$ ，求曲线方程。

解：设所求曲线方程为  $y = y(x)$ 。按题意有： $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，

故  $y = \int 2x dx = x^2 + C$ 。又因为曲线过点  $(1, 2)$ ，

故代入上式  $2 = 1 + C$ ，于是所求方程为  $y = x^2 + 1$ 。

随堂练习 设某物体以速度  $v = 3t^2$  作直线运动，且当  $t = 0$  时  $s = 2$ ，求运动规律  $s = s(t)$ 。

解：按题意有  $s'(t) = 3t^2$ ，即  $s(t) = \int 3t^2 dt = t^3 + C$ ，  
再将条件  $t = 0$  时  $s = 2$  代入得  $C = 2$ ，故所求运动规律为  $s = t^3 + 2$ 。

由积分定义知，积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系：

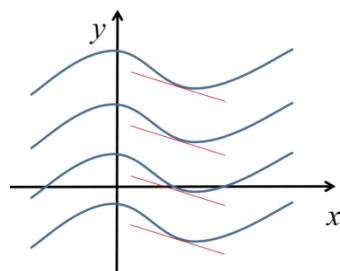
$$(1) (\int f(x) dx)' = f(x) \text{ 或 } d(\int f(x)) = f(x) dx;$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

## 2. 不定积分的几何意义

在  $f(x)$  全部原函数  $F(x) + C$  ( $C \in R$ ) 中，对任何一个给定的  $C$ ，都有一个确定的原函数，在几何上也就对应着一条确定的曲线，称为**积分曲线**。 $F(x) + C$  对应着一簇曲线，称为  $f(x)$  的**积分曲线簇**。

这些曲线在横坐标相同点处的切线斜率相等，即它们在横坐标相同点处的切线彼此平行，积分曲线簇中的任何一条曲线都可以由其中的  $y = F(x)$  沿  $y$  轴上下平移而得到。



例3 设曲线通过点  $(1, 2)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程。

解：设所求曲线方程为  $y = F(x)$ ，依题设曲线上任一点  $(x, y)$  处的切线斜率  $F'(x) = 2x$ ，即  $F(x)$  是  $2x$  的一个原函数。

因为  $\int 2x dx = x^2 + C$ ，故必有某个常数  $C$ ，

随堂练习：利用学习通平台发布习题，学生作答后上传答案及时批改，并对存在典型错误的学生指出问题，同时警示其他同学避免出现相同错误。

培养学生的逆运算思维：积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系。



使  $F(x) = x^2 + C$ ，代入点  $(1, 2)$  得  $C = 1$ ，

于是所求曲线为  $F(x) = x^2 + 1$ 。

### 3. 不定积分的性质

#### (1) 线性性

设  $f(x)$ ， $g(x)$  的原函数存在，则

$$1) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ 是不为零的常数})$$

$$2) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \quad (\text{可推广到有限个函数的情形}).$$

#### (2) 可微性

$$1) [\int f(x)dx]' = f(x) \text{ 或 } d[\int f(x)dx] = f(x)dx$$

$$2) \int f'(x)dx = f(x) + C \text{ 或 } \int df(x) = f(x) + C.$$

### 4. 不定积分的基本公式

$$\int kdx = kx + C \quad (k \text{ 为常数});$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

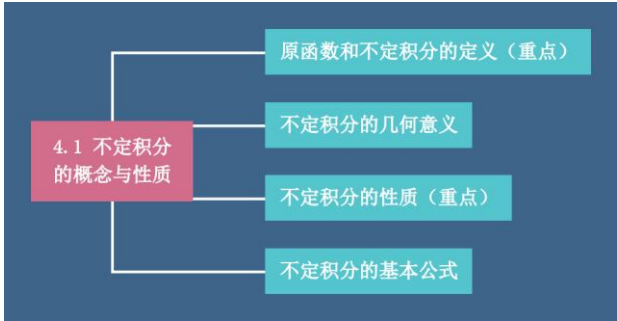
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

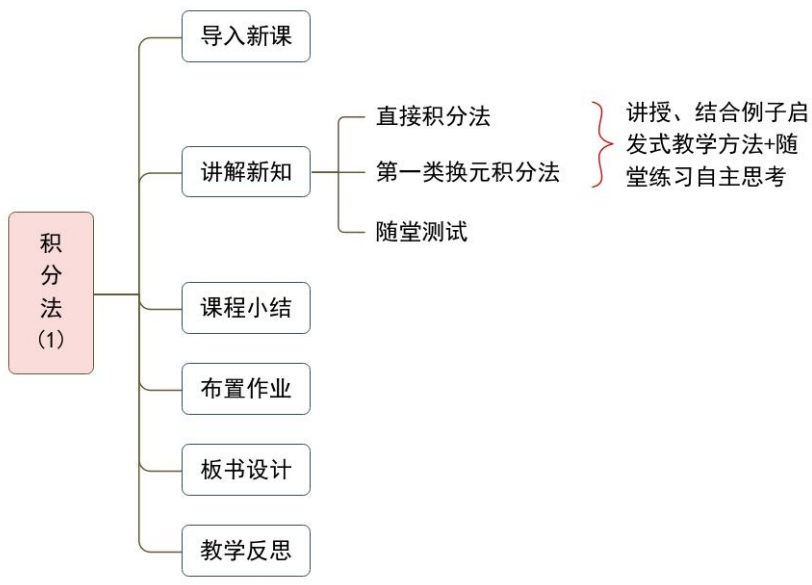
例 4 求  $\int \frac{x^2\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$  .

解： 原式  $= \int (\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 2x^{-\frac{5}{3}}) dx$   
 $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 3 \ln|x| - 3x^{-\frac{2}{3}} + C.$

难点：不定积分的性质。

提问：利用学习通平台抽学生回答导数的原函数，以加强学生对基本初等函数求导的熟悉度，同时为不定积分的计算打下基础。

<p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 原函数、不定积分的概念及其性质</li> <li>2. 熟记基本积分公式.</li> <li>3. 掌握不定积分的基本公式</li> <li>4. 掌握不定积分的直接积分法</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：不定积分的结果一定是唯一的吗？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在教学过程中，我采用了讲授、案例分析、讨论等多种教学方法，整个课堂具有满满的活力。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在讲课中，我对知识点之间的关系、整合性等讲授得不够充分。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课中，在讲授不定积分的概念时，我可以回顾一下导数的定义和性质，帮助学生理解不定积分与导数之间的逆运算关系。同时，我也可以在讲解不定积分的性质时，引入一些与微分相关的概念和公式，让学生看到微积分之间的紧密联系和内在一致性。</p>	

授课题目	§ 4.2 积分法 (1)	课时: 2 学时
教学目标	<b>知识目标:</b> 1. 学会利用公式进行积分。学生应能够运用掌握的不定积分公式, 对给定的被积函数进行积分运算。 2. 理解第一类换元积分法的基本思想。即复合函数求导法则的逆过程。掌握凑微分的方法, 能够识别并构造出复合函数与其内函数的积的形式。	
	<b>能力目标:</b> 培养学生的计算能力。学生能够运用积分的基本公式和性质, 正确计算各类函数的积分。	
	<b>素养目标:</b> 培养学生严谨的数学态度。学生能够以严谨的态度对待积分的学习和应用, 注意细节和准确性, 避免在计算过程中出现错误。	
重点难点	<b>教学重点:</b> 直接积分法、第一类换元积分法。 <b>教学难点:</b> 第一类换元积分法。	
方法手段	<b>教学方法:</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段:</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习不定积分的概念、性质和积分公式导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 直接积分法</b>		<b>重点 1: 直接积分法。</b>

利用积分表中的公式和不定积分的性质可直接求一些简单函数的不定积分, 这种求不定积分的方法称为直接积分法, 它是一种最基础的积分方法. 下面通过例题来看如何用此法求一些函数的不定积分.

例 1 求  $\int \frac{x + x^{-1} + \sqrt{x}}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \frac{x + x^{-1} + \sqrt{x}}{x} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \int dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

例 2 求  $\int 3^x e^x dx$ .

$$\text{解: } \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C.$$

例 3 求  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x - \arctan x + C.\end{aligned}$$

例 4 求  $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 4\sin^2 x \csc x\right) dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 4\sin^2 x \csc x\right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - 4 \int \sin x dx \\ &= 2 \arcsin x + 4 \cos x + C.\end{aligned}$$

例 5 求  $\int \csc x (\cot x + 2 \csc x) dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \csc x (\cot x + 2 \csc x) dx \\ &= \int (\csc x \cot x + 2 \csc^2 x) dx \\ &= -\csc x - 2 \cot x + C.\end{aligned}$$

例 6 求  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 - \cos x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.\end{aligned}$$

随堂练习 1 求  $\int \frac{\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x - 1}{\tan x + 1} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } & \int \frac{\tan^3 x + \tan^2 x - \tan x - 1}{\tan x + 1} dx \\ &= \int \frac{\tan^2 x(\tan x + 1) - (\tan x + 1)}{\tan x + 1} dx \\ &= \int (\tan^2 x - 1) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 2) dx \\ &= \tan x - 2x + C. \end{aligned}$$

例 7 一个静止的质点, 其质量为  $m$ , 在变力  $F = A \sin t$  (其中  $A$  为常数,  $t$  为时间变量) 的作用下沿直线运动, 试求质点的运动速度  $v(t)$ .

解: 根据力学第二定律, 质点运动的加速度是

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{A \sin t}{m}$$

$$\text{由于 } v'(t) = a(t) = \frac{A \sin t}{m}$$

$$\text{所以 } v(t) = \int \frac{A \sin t}{m} dt = -\frac{A}{m} \cos t + C, \text{ 其中 } C \text{ 为待}$$

定常数, 它可由质点在  $t=0$  时状态定出. 由假设, 质点开始时处于静止状态, 故  $v(0)=0$ , 由

$$v(0) = -\frac{A}{m} \cos 0 + C = -\frac{A}{m} + C = 0$$

得  $C = \frac{A}{m}$ , 从而求得  $v(t) = -\frac{A}{m} \cos t + \frac{A}{m}$ .

## 2. 换元积分法: 第一类换元积分法 (凑微分法)

例 8 求  $\int e^{3x} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } & \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^u d(3x) \underline{u=3x} \\ & \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C \underline{\text{回代}} \underline{\frac{1}{3} e^{3x} + C} \end{aligned}$$

定理 如果  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 则

$$\int f(u) du = \int F(u) + C,$$

其中  $u = \phi(x)$  是  $x$  的可微函数.

凑微分法的一般计算程序:

$$\int f[\phi(x)] \phi'(x) dx \underline{\text{凑微分}} \int f[\phi(x)] d\phi(x) \quad \underline{\text{令 } u = \phi(x)}$$

$$\int f(u) du = F(u) + C \underline{\text{回代}} F(\phi(x)) + C.$$

随堂练习 1: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

重点 2 (也是难点): 第一类换元积分。  
凑微分培养学生的逆运算思维。

例9 求  $\int \cos^2 x \sin x dx$ .

解: 设  $u = \cos x$ , 得  $du = -\sin x dx$ .

$$\text{原式} = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

随堂练习2 求  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \left(\frac{dx}{x}\right) \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} d(\ln x) = \arcsin(\ln x) + C.\end{aligned}$$

例10 求下列积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} (a>0); \quad (2) \int \frac{dx}{a^2+x^2}; \quad (3) \int \tan x dx;$$

$$(4) \int \cot x dx \quad (5) \int \sec x dx; \quad (6) \int \csc x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } (1) \text{ 原式} &= \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} d(\frac{x}{a}) \\ &= \arcsin \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(3) \text{ 原式} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

$$(4) \text{ 原式} = \ln |\sin x| + C.$$

$$\begin{aligned}(5) \text{ 原式} &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\tan x + \sec x} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} dx \\ &= \int \frac{1}{\tan x + \sec x} d(\tan x + \sec x) \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

$$(6) \text{ 原式} = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

随堂测试: 求下列积分:

$$(1) \int \frac{1}{x^2-a^2} dx; \quad (2) \int \frac{3+x}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

随堂练习2: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

随堂测试: 利用学习通平台发布测试题, 规定时间学生作答, 最后给出答案, 自行判断对错。挑选作答精准的

$$(3) \int \frac{1}{1+e^x} dx; \quad (4) \int \sin^2 x dx;$$

**解：**本题积分前，需先用代数运算或三角变换对被积函数作适当变形。

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right] \\ &= \frac{1}{2a} [\ln |x-a| - \ln |x+a|] + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{3+x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx. \\ &= 3 \arcsin \frac{x}{2} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{4-x^2}} d(4-x^2) \\ &= 3 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx \\ &= \int \left( 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int dx - \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) \\ &= x - \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

### 三、课程小结

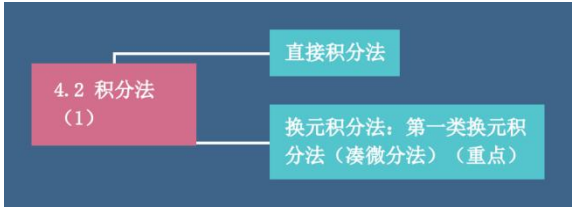
1. 直接积分法（利用积分公式）
2. 第一类换元积分：凑微分

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx \quad \underline{\text{凑微分}} \quad \int f[\phi(x)]d\phi(x)$$

$$\underline{\underline{\text{令 } u = \phi(x)}}$$

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad \underline{\underline{\text{回代}}} \quad F(\phi(x)) + C$$

学生上台讲解，既培养锻炼了计算能力，又锻炼了表述能力。

<p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：总结凑微分能解决什么样得题型？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在授课中，更注重与学生的互动，通过提问、练习、测试等方式激发他们的学习兴趣和积极性；利用多媒体、电子手写板等演示积分求解过程，利用学习通平台发布随堂练习等方式促进学生巩固所学知识，帮助学生更直观地且富有逻辑地理解两种积分方法。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在课间，反馈不及时，我没有及时给予学生足够的反馈和指导，导致他们无法及时纠正错误和弥补不足。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后，为了进一步提高教学效果，我计划在未来的教学中加强对学生的个别辅导和答疑，帮助他们解决学习中的困惑和问题。</p>	



授课题目	§4.2 积分法 (2)	课时: 2 学时
教学目标	<b>知识目标:</b> 1. 掌握第二类换元积分方法。学生需要掌握第二类换元积分法的具体步骤和技巧, 包括如何选择合适的换元函数、如何进行换元后的积分计算以及如何还原原变量等。	
	<b>能力目标:</b> 培养学生的分析和计算能力。学生需要具备分析被积函数结构的能力, 能够判断何时使用第二类换元积分法计算不定积分。	
	<b>素养目标:</b> 培养学生数学素养。通过学习第二类换元积分法, 培养学生的逻辑思维和推理能力等数学素养, 学会从复杂的问题中抽象出数学模型, 并运用数学方法进行求解。	
重点难点	<b>教学重点:</b> 第二类换元积分。 <b>教学难点:</b> 第二类换元积分。	
方法手段	<b>教学方法:</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段:</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计	<pre>           graph LR             A[积分法 (2)] --- B[导入新课]             A --- C[讲解新知]             A --- D[课程小结]             A --- E[布置作业]             A --- F[板书设计]             A --- G[教学反思]             C --- H[第二类换元积分法]             H --- I[三角代换]             H --- J[倒代换]             H --- K[根式代换]             H --- L[随堂测试]             I --- M[讲授+结合例子 启发式教学方法+随堂练习 自主思考]             J --- M             K --- M             L --- M           </pre>	
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b>  复习直接积分法与第一类换元积分法导入新课。 提出问题: 前面我们学习了第一类换元积分法, 其最显著特点是作变量代换 $u = \varphi(x)$ ( $x$ 作为自变量), 利用该法大大的扩大了积分的范围, 但对于一些积分运用该法仍然很		组织学生讨论: 对于像 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 类型题, 如何求出不定积分? 并利用学

难甚至不能凑效. 例如:  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 、 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$  等等,

那我们应该怎么办呢?

## 二、讲解新知

定理: 第二换元积分法

$$\int f(x) dx \xrightarrow{\text{换元 } x = \phi(t)} \int f[\phi(t)] \phi'(t) dt \xrightarrow{\text{积分}} F(t) + C \xrightarrow{t = \phi^{-1}(x)} F[\phi^{-1}(x)] + C$$

第二类换元法中常见的有根式代换法、倒代换法和三角代换法三种.

### 1. 根式代换法

如果被积函数中含有  $\sqrt[n]{ax+b}$  或  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  ( $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ) 时,

一般我们可以考虑通过根式代换法, 将原积分化为有理函数的积分计算.

例 1 求  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ .

解: 为了消去根式, 可令  $\sqrt{x} = t$ , 即  $x = t^2 (t \geq 0)$ ,

则  $dx = 2t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t}{1+t} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t} dt \\ &= 2 \int \frac{(t^2-1)+1}{1+t} dt = 2 \int (t-1+\frac{1}{1+t}) dt \\ &= t^2 - 2t + 2 \ln |1+t| + C \\ &= x - 2\sqrt{x} + 2 \ln |1+\sqrt{x}| + C. \end{aligned}$$

例 2 求  $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$ .

解: 设  $t = \sqrt[3]{x+2}$ , 则  $x+2 = t^3$ ,  $dx = 3t^2 dt$ , 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx &= 3 \int \frac{t^2}{1+t} dt = 3 \int \frac{t^2-1+1}{1+t} dt \\ &= 3 \int [(t-1) + \frac{1}{1+t}] dt \end{aligned}$$

习通让学生抢答问题, 对积极的学生加适当的课堂积分。

重点 (也是难点): 第二类换元积分法。

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int [(t-1)d(t-1) + 3 \int \frac{1}{1+t} d(t+1)] \\
 &= \frac{3}{2}(t-1)^2 + 3 \ln |t+1| + C \\
 &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2}-1)^2 + 3 \ln |\sqrt[3]{x+2}+1| + C.
 \end{aligned}$$

例 3 求  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$ .

解: 设  $t = \sqrt[4]{x}$ , 则  $x = t^4$ ,  $dx = 4t^3 dt$ , 代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \int \frac{1}{t^2 + t} 4t^3 dt = 4 \int (t-1 + \frac{1}{t+1}) dt \\
 &= 2(t-1)^2 + 4 \ln |t+1| + C = (2\sqrt[4]{x}-1)^2 + 4 \ln |\sqrt[4]{x}+1| + C.
 \end{aligned}$$

随堂练习 1  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ .

解 1: 设  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , 代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int \frac{2t dt}{t(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= 2 \arctan t + C \\
 &= 2 \arctan \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

解 2: 由于

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = d(2\sqrt{x}) = 2d(\sqrt{x}), \quad 1+x = 1+(\sqrt{x})^2, \text{ 所以}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

## 2. 倒代换法

所谓倒代换, 即设  $x = \frac{1}{t}$  或  $t = \frac{1}{x}$ , 一般地若被积函数是

分式, 分子、分母关于  $x$  的最高次幂分别是  $m, n$ , 当  $n-m > 1$  时, 可试用倒代换法.

例 4 求  $\int \frac{dx}{x(2+x^7)}$ .

随堂练习 1: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

解: 设  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ . 代入得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}(2 + \frac{1}{t^7})} = -\int \frac{t^6}{1 + 2t^7} dt \\ &= -\frac{1}{14} \int \frac{d(1 + 2t^7)}{1 + 2t^7} = -\frac{1}{14} \ln |1 + 2t^7| + C \\ &= -\frac{1}{14} \ln |1 + 2x^{-7}| + C.\end{aligned}$$

### 3. 三角代换法

有些特殊的二次根式, 为了消除根号, 通常利用三角函数关系式来进行换元.

例 5 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

解: 令  $x = a \sin t$  ( $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ ), 那么

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$  且  $dx = a \cos t dt$ , 于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C.\end{aligned}$$

随堂练习 2 求  $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ .

解: 设  $x = 2 \sin t$  ( $|t| < \frac{\pi}{2}$ ), 则  $dx = 2 \cos t dt$ , 代入

$$\begin{aligned}\text{得 } \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt \\ &= 4 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= 2(t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C = 2(t + \sin t \cos t) + C.\end{aligned}$$

因为  $x = 2 \sin t$  ( $|t| < \frac{\pi}{2}$ ), 所以  $t = \arcsin \frac{x}{2}$ ,

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}, \text{ 于是}$$

随堂练习 2: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = 2(t + \sin t \cos t) + C$$

$$= 2\left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\right) + C.$$

例 6 求  $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} (a > 0)$ .

解: 令  $x = a \tan t$  ( $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ ), 则  $dx = a \sec^2 t dt$ .

所以

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \sec^2 t}{a^3 \sec^3 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C.$$

又因为  $\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ,

故  $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$

例 7 求  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

解: 设  $x = \sin t$  ( $|t| < \frac{\pi}{2}$ ), 则  $dx = \cos t dt$ ,

$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 t$ , 代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\cos t}{\cos^3 t} dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C,$$

由  $x = \sin t$ , 得  $\tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 于是

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

例 8 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ .

解: 设  $x = 3 \tan t$  ( $|t| < \frac{\pi}{2}$ ), 则  $dx = 3 \sec^2 t dt$ , 代入

得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{3\sec^2 t dt}{\sqrt{9(1+\tan^2 t)}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\sec t} \\ &= \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1,\end{aligned}$$

根据  $\tan t = \frac{x}{3}$  构造直角三角形得  $\sec t = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$ , 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \ln \left| \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} \right| + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{9+x^2}| + C \quad (C = C_1 - \ln 3).\end{aligned}$$

随堂测试: 求  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ .

解: 当  $x > 3$  时, 设  $x = 3\sec t$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ), 则

$dx = 3\sec t \tan t dt$ ,  $\sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{\sec^2 t - 1} = 3\tan t$ , 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec t \cdot \tan t}{9\sec^2 t \cdot 3\tan t} dt \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sec t} dt = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C,\end{aligned}$$

由  $x = 3\sec t$ , 得  $\sin t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ , 于是

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

当  $x < -3$  时, 设  $x = -u$ , 则由  $-u < -3$  得  $u > 3$ , 由上面计算结果得,

$$\int \frac{d(-u)}{u^2\sqrt{u^2-9}} = -\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-9}} = -\frac{\sqrt{u^2-9}}{9u} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$$

故当  $x > 3$  或  $x < -3$  时, 都有  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$

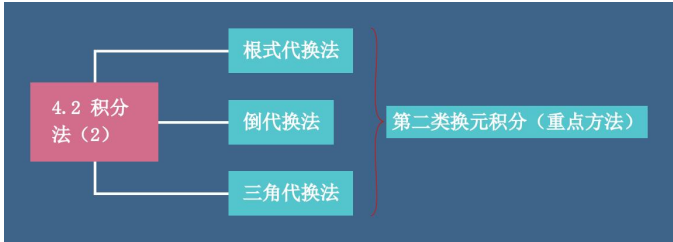
结论: 一般地, 当被积函数含有

(1)  $\sqrt{a^2-x^2}$ , 可作替换  $x = \sin t$ ;

(2)  $\sqrt{x^2+a^2}$ , 可作替换  $x = a \tan t$ ;

随堂测试: 利用学习通平台发布测试题, 规定时间学生作答, 最后给出答案, 自行判断对错。挑选作答精准的学生上台讲解, 既培养锻炼了计算能力, 又锻炼了表述能力。

结论: 总结技巧, 有利于学生掌握不定积分的计算。

<p>(3) <math>\sqrt{x^2 - a^2}</math> , 可作替换 <math>x = a \sec t</math> .</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 根式代换</li> <li>2. 倒代换</li> <li>3. 三角代换</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：第一类换元积分与第二类换元积分的区别？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。也是培养学生的辨别和判断意识，逐渐具备良好的数学素养。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>在教学过程中，我延续采用了讲授、案例分析、讨论等多种教学方法，面对复杂的知识内容，整个课堂仍具有比较好的互动性。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>整个课堂讲授重，虽然我讲解了很多例题，但学生的练习量还不够，需要增加更多的练习来巩固所学知识。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课中，我将更加注重以学生为主，充分考虑他们的学习情况，在课时安排中，留出一定时间让学生多动手练习，以达到及时巩固所学知识。</p>	

授课题目	§4.2 积分法 (3)	课时: 2 学时
教学目标	<b>知识目标:</b> 1. 掌握分部积分公式, 即 $\int u dv = uv - \int v du$ , 并理解其推导过程。 2. 明确分部积分法主要运用的情况。例如被积函数为幂函数与三角函数、幂函数与指数函数、对数函数或反三角函数的乘积时, 可考虑使用分部积分法。	
	<b>能力目标:</b> 培养学生的逻辑思维、计算和辨析能力。通过分部积分法的学习, 学生能够准确判断何时使用分部积分法求解不定积分, 并正确选取 $u$ 和 $dv$ 。熟练掌握分部积分法的计算步骤, 包括将原积分改写为 $\int u dv$ 形式、求出 $uv$ 和 $\int v du$ 、将结果相减得到原积分的解等。	
	<b>素养目标:</b> 培养学生逆向思维意识。从已知的积分结果反推原函数或积分过程, 将复杂的不定积分通过分部积分转换简单化该不定积分, 具备逆向思维意识。	
重点难点	<b>教学重点:</b> 分部积分法。 <b>教学难点:</b> 分部积分法。	
方法手段	<b>教学方法:</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段:</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计	<pre>           graph LR             A[积分法 (3)] --- B[导入新课]             A --- C[讲解新知]             A --- D[课程小结]             A --- E[布置作业]             A --- F[板书设计]             A --- G[教学反思]             C --- H[分部积分法]             H --- I[降次法]             H --- J[转换法]             H --- K[循环法]             H --- L[递推法]             I --- M[讲授+结合例子启发式教学+随堂练习自主思考]             J --- M             K --- M             L --- M           </pre>	
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习第一类和第二类换元积分方法, 并进行比较, 以此		



导入新课.

## 二、讲解新知

利用前面所介绍的积分方法可以解决许多积分的计算,但对于像  $\int \ln x dx$ 、 $\int x^2 e^x dx$ 、 $\int x \cos x dx$  等这样一些简单的积分却仍然无能为力,为了解决这个问题,我们可用两个函数乘积的微分法则推得求积分的另外一种方法——分部积分法.

### 定理: 分部积分法

设函数  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  具有连续导数, 根据乘积微分公式有

$$d(uv) = u dv + v du,$$

移项  $u dv = uv - v du,$

两边积分得  $\int u dv = uv - \int v du,$  (分部积分公式)

### 1. 降次法

被积函数为幂函数与三角函数或指数函数的乘积时, 选幂函数为  $u$ , 三角函数或指数函数为  $v'$ , 应用分部积分公式后就降一次幂.

例 1 求  $\int x \cos x dx$ .

解: 设  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx = d(\sin x)$ , 代入公式得

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

总结: 运用分部积分法的关键是恰当的选择好  $u$ ,  $dv$ . 一般要考虑下面两点:

- (1)  $v$  要易求;
- (2)  $\int v du$  要比  $\int u dv$  容易积出.

例 2 求  $\int x e^x dx$ .

解:  $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

例 3 求  $\int x^2 e^x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int x^2 e^x dx &= \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x d(e^x) \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x + C.\end{aligned}$$

### 2. 转换法

当被积函数为幂函数或常数与反三角函数或对数函数的乘积时, 选反三角函数或对数函数为  $u$ , 幂函数为  $v'$ , 应

重点: 分部积分法的求解步骤。

组织学生讨论: 分部积分的基本步骤是什么? 既可以让学熟悉分部积分的基本公式, 又可以复习微分的求解方式。

用分部积分公式后反三角函数或对数函数转变为别的函数.

例 4 求  $\int \ln x dx$ .

解: 这里被积函数只有一部分, 把  $\ln x$  看成  $u$ , 则  $dx$  就是  $dv$ , 因此

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

例 5 求  $\int x \ln x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \int x \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d \ln x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

例 6 求  $\int \arcsin x dx$

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d \arcsin x \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

随堂练习 1 求  $\int x \arctan x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d \left( \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

### 3. 循环法

当被积函数为三角函数正弦或余弦与指数函数的乘积时, 任意选定其中一个函数为  $u$ , 幂函数为  $v'$ , 应用两次分部积分公式后都会变为原来的积分.

例 7 求  $\int e^x \sin x dx$ .

$$\text{解: } \int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

随堂练习 1: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误.

难点: 循环法.

$$= e^x \sin x - \int \cos x d(e^x)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

$$\text{移项整理得 } \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

#### 4. 递推法

当被积函数为某一函数的高次幂时, 可适当选择  $u$  和  $v'$ , 应用分部积分公式后, 会得到该函数的高次幂函数和低次幂函数的关系 (递推公式).

下列几种类型积分, 均可用分布积分求解:

$$\text{对于 } \int x^n e^{ax} dx, \int x^n \sin x dx, \int x^n \cos x dx,$$

可设  $u = x^n$ ;

$$\text{对于 } \int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arctan x dx,$$

可设  $u = \ln x, \arcsin x, \arctan x$ ;

$$\text{对于 } \int e^{ax} \sin bxdx, \int e^{ax} \cos bxdx,$$

可设  $u = \sin bx, \cos bx$ .

(1) 上述情况  $x^n$  换为多项式仍然成立.

(2) 一经选定, 再次分布积分时, 必须按原来的选择.

例 8 求  $I_n = \int (\ln x)^n dx$  的递推公式 (其中  $n$  为正整数, 且  $n > 2$ ).

$$\begin{aligned} \text{解: } I_n &= \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x d(\ln x)^n \\ &= x(\ln x)^n - \int x \cdot n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \\ &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

所求的递推公式为  $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$ .

随堂练习 2 求  $\int \sec^3 x dx$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int \sec x d \tan x = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln |\sec x + \tan x|. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C.$$

在求不定积分的过程中, 有时要同时使用换元积分法与分部积分法, 前面有过例子, 下面再看一例

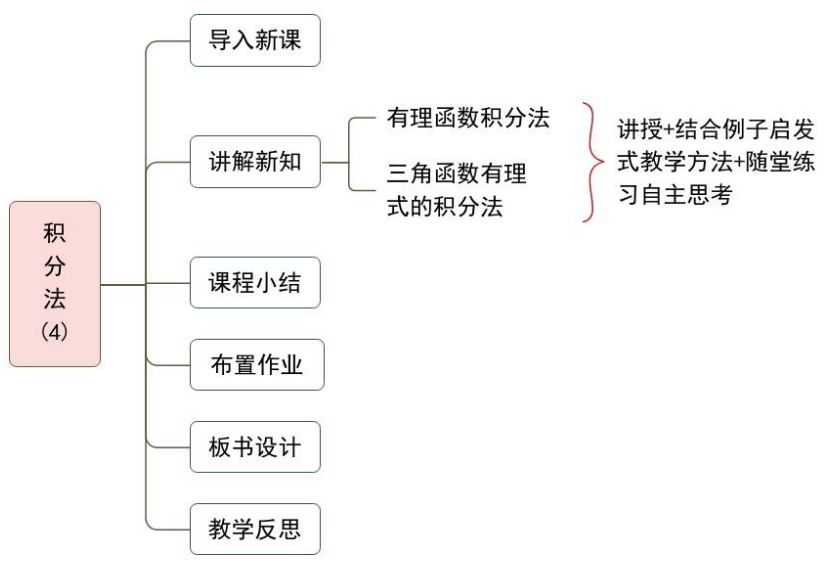
随堂练习 3 用两种方法求  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ .

解法 1: 分项, 凑微分

随堂练习 2: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 随机抽取学生对其他学生的答案进行批阅. 培养学生的辨析能力。

随堂练习 3: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 随机抽取

<div><math display="block">\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} dx = \int \sqrt{1+x} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.</math><math display="block">= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C.</math></div> <div><p><b>解法 2:</b> 令 <math>1+x=u</math> , 则 <math>dx=du</math>.</p><math display="block">\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int \sqrt{u} du - \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C</math><math display="block">= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C.</math></div> <div><h3>三、课程小结</h3><ol style="list-style-type: none"><li>1. 降幂法</li><li>2. 转换法</li><li>3. 循环法</li><li>4. 递推法</li></ol></div> <div><h3>四、布置作业</h3><ol style="list-style-type: none"><li>1. 教材的课后习题</li><li>2. 学习通上对应的作业</li><li>3. 思考：利用分部积分法的关键问题是什么？</li></ol></div> <div><h3>五、板书设计</h3><div><div><div>4.2 积分法 (2)</div><div>根式代换法</div><div>倒代换法</div><div>三角代换法</div></div><div>第二类换元积分（重点方法）</div></div></div>	<p>学生对其他学生的答案进行批阅。培养学生的辨析能力。</p> <p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生及时复习相关知识以及重点知识。</p>
<div><h3>教学反思</h3><ol style="list-style-type: none"><li>1. 成功之处<p>在教学中，我比较清晰地阐述了分部积分法的原理、公式以及应用方法，通过具体的例子展示了如何选择合适的 <math>u</math> 和 <math>dv</math>，使得学生对分部积分的理解更加容易。</p></li><li>2. 存在问题<p>在讲课中，教学手段和方法的创新性不足。</p></li><li>3. 改进措施<p>在今后的授课中，（1）根据学生的学习情况和反馈，对教学内容进行适当调整和优化，使其更加符合学生的认知水平和实际需求。（2）采用更多元化的教学方法和手段，如翻转课堂、项目式学习等，以激发学生的学习兴趣 and 参与度。</p></li></ol></div>	

授课题目	§ 4.2 积分法 (4)	课时: 2 学时
教学目标	<b>知识目标:</b> 1. 理解有理函数积分法的概念。掌握有理函数的概念, 即两个多项式的商表示的函数。 2. 掌握有理函数积分的基本方法。学习有理函数分解的方法, 如部分分式分解。掌握常见类型的有理函数(如真分式、假分式等)的积分计算方法。	
	<b>能力目标:</b> 培养学生的计算能力。能够熟练地对有理函数进行部分分式分解, 能够准确计算各种类型的有理函数的不定积分。	
	<b>素养目标:</b> 培养学生的创新精神。鼓励学生探索新的解题方法和思路, 培养其创新意识和实践能力。引导学生关注数学在实际问题中的应用, 培养其应用数学解决实际问题的能力。	
重点难点	<b>教学重点:</b> 有理函数的积分法。 <b>教学难点:</b> 三角函数有理分式的积分法。	
方法手段	<b>教学方法:</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段:</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b>  1. 复习分部积分的求解方法。  2. 课前练习: $\int e^{\sqrt{x}} dx$		通过复习和课前练习能够快速督促学生进入课堂学习状态。借助学习通平台发

解： 设  $\sqrt{x} = t$  有  $x = t^2, dx = 2tdt$ ， 则

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t 2tdt = 2 \int tde^t \\ &= 2(e^t t - \int e^t dt) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.\end{aligned}$$

## 二、讲解新知

### 1. 有理函数

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，即具有如下形式的函数

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_m},$$

其中  $m, n$  都是非负整数， $a_0, a_1 \cdots b_0, b_1 \cdots$  都是实数，并且  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ . 我们假定  $p(x), q(x)$  无公因式，当  $n \geq m$  时称这有理函数为**假分式**；当  $n < m$  时称这有理函数为**真分式**. 这里先介绍真分式的积分方法.

有些真分式的积分，可以用直接、换元等积分方法进行计算. 例如

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^2+1} dx &= 3 \arctan x + C, \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \\ \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \text{ 等等.}\end{aligned}$$

但有些真分式的积分到目前为止还无法计算，下面将介绍求真分式积分的另一种方法——**部分分式法**.

先看几个式子

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{6}{x-3} + \frac{5}{x-2} = \frac{11x-27}{(x-3)(x-2)}; \\ (2) \quad & \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2}; \\ (3) \quad & \frac{2}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)};\end{aligned}$$

从上面三个式子可以看出等式左端是几个较简单的真分式的和，经通分合并后变为一个较复杂的真分式，不难想象，为了解决复杂的真分式的积分问题，可先把复杂的真分式分解成若干个简单的真分式的和，然后再对简单的真分式积分. 下面介绍把复杂的真分式分解成若干个简单的真分式的方法.

观察上面三个式子：

(1) 的右端分母有因式  $(x-3)$  及  $(x-2)$ ，左端就有形如  $\frac{A}{x-3}$  和  $\frac{B}{x-2}$  的分式；

布课前练习题，学生能够快速接收到上课督促的信息，从而提高学习的积极性。

(2) 的右端分母有因式  $x$  及  $(x-1)^2$ , 左端就有形如  $\frac{A}{x}$  和  $\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$  的分式;

(3) 的右端分母有形如  $(x+2)$  及  $(x^2+2x+2)$  的因式, 左端就有形如  $\frac{A}{x+2}$  和  $\frac{Bx+C}{(x^2+2x+2)}$  的分式.

由代数学可知下列结论成立:

若真分式分母中有因式  $(x-a)^n$ , 则分解后对应项为:

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

若真分式分母中有因式  $(x^2+px+q)^n (p^2-4q < 0)$ , 则分解后对应项为:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

## 2. 有理函数积分法

重点: 有理函数积分法。

下面通过例题介绍如何用部分分式法求不定积分

例 1 求  $\int \frac{x+3}{x^2+5x-6} dx$ .

解: 由于被积函数分母  $x^2+5x-6 = (x+6)(x-1)$ , 因而被积函数可以写成  $\frac{x+3}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1}$ ,

这里  $A, B$  为待定常数, 可用如下方法求出  $A, B$ ,

两端去分母  $x+3 = A(x-1) + B(x+6)$

整理得  $x+3 = (A+B)x - A + 6B$

比较系数得  $\begin{cases} A+B=1 \\ -A+6B=3 \end{cases}$  解方程组得  $A = \frac{3}{7}, B = \frac{4}{7}$ ;

另一种方法是在  $x+3 = A(x-1) + B(x+6)$  中, 分别令  $x=1$  和  $x=-6$  得  $B = \frac{4}{7}, A = \frac{3}{7}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+5x-6} dx &= \frac{3}{7} \int \frac{1}{x+6} dx + \frac{4}{7} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{3}{7} \ln|x+6| + \frac{4}{7} \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

例 2 求  $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} dx$ .

解: 被积函数可以写成  $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ ,

去分母得  $x^2+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$ ,

令  $x=0$ , 得  $A=1$ , 令  $x=1$ , 得  $C=2$ , 令  $x=2$ , 得  $B=0$ , 于是

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x-1} + C.$$

随堂练习 1 求  $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} dx$ .

解: 被积函数可以写成

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

解得  $A=1, B=-\frac{1}{2}, C=D=-\frac{1}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} dx &= \int \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)} \right] dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

随堂练习 2 求  $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx$

解: 被积函数可以写成

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} = x^2+x+1 + \frac{x^2+x-8}{x^3-x}$$

$$\text{而 } \frac{x^2+x-8}{x^3-x} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx &= x^2+x+1 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

如果被积函数是假分式, 则根据多项式除法将假分式写成一个多项式与一个真分式和的形式, 然后分别积分即可

因为假分式总可以根据多项式除法写成一个多项式与一个真分式的乘积和形式, 这里就只对真分式进行讨论。

任意一个真分式可分解为以下四类最简单的分式之和:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}.$$

若有理真分式分母中有因式  $(x-a)^n, n \geq 2$ , 分解后分式中含有:

$$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

若有理真分式分母中有因式  $(x^2+px+q)^n, n \geq 2$ , 分解后分式中含有:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

随堂练习 3 求  $\int \frac{x+3}{x^2+5x-6} dx$ .

$$\text{解: } \int \frac{x+3}{x^2+5x-6} dx = \int \frac{x+3}{(x+6)(x-1)} dx$$

随堂练习 1-2: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

随堂练习 3-4: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案, 让学生之间相互



$$= \frac{3}{7} \int \frac{1}{(x+6)} dx + \frac{4}{7} \int \frac{1}{(x-1)} dx.$$

### 3. 三角函数有理函数的积分法

由三角学知道,  $\sin x$  与  $\cos x$  都可以用  $\tan \frac{x}{2}$  的有理式表示, 即

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

如果作变换  $u = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$ , 则有

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\text{而 } x = 2 \arctan u, \text{ 从而 } dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

上述代换又称为“万能代换”, 用“万能代换”求三角函数有理式不定积分的方法也称万能代换法.

采用万能的代换法, 令  $\tan \frac{x}{2} = u$ ,  $x = 2 \arctan u$ .

例 3 求  $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$ .

解: 设  $\tan \frac{x}{2} = u$ ,  $x = 2 \arctan u$

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} du \\ &= \ln |1 + \tan \frac{x}{2}| + C. \end{aligned}$$

**注** 一般形如  $\int R(\cos x, \sin x) dx$  的积分, 可采用万能代换法, 但有时积分起来比较麻烦, 在许多情况下可以用其它更方便的方法来解.

例 4 求  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

$$\text{解: } \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\sin x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} dx$$

批改, 遇到问题可以及时询问老师。最后, 再结合问题进行讲解, 加深学生的印象。

难点: 三角函数有理函数的积分法。

提醒学生: 掌握方法的技巧即可快速求解三角函数有理函数的积分。

<div><math display="block">\begin{aligned}&amp;= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\&amp;= \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.\end{aligned}</math></div> <div>三、课程小结</div> <div><div>1. 有理函数积分法</div><div>2. 三角函数有理函数的积分法</div></div> <div>四、布置作业</div> <div><div>1. 教材的课后习题</div><div>2. 学习通上对应的作业</div><div>3. 预习：什么是曲边梯形，如何求它的面积？</div></div> <div>五、板书设计</div> <div><pre>graph LR     A[4.2 积分法 (4)] --- B[有理函数]     A --- C[有理函数积分法 (重点)]     A --- D[三角函数有理函数的积分法]</pre></div>	<div>布置预习：培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</div>
<div>教学反思</div> <div><div>1. 成功之处</div><div>在教学过程中，我良好地设计了教师讲授和学生练习的时长，布置了大量的随堂练习，从而巩固新学知识，学生反馈效果不错，知识掌握较好。</div><div>2. 存在问题</div><div>在本节课中，教学手段不够创新。</div><div>3. 改进措施</div><div>在今后的教学准备中，（1）教学策略调整：根据学生的反馈和学习成效，适时调整教学内容的深度、速度和方法。引入更多互动式和启发式的教学方法，激发学生的学习兴趣和积极性。（2）持续学习与提升：教师应保持对最新教学方法和技术的关注，不断学习和提升自己的教学水平。与同行交流经验，分享教学资源，共同推动有理函数积分法教学的发展。</div></div>	

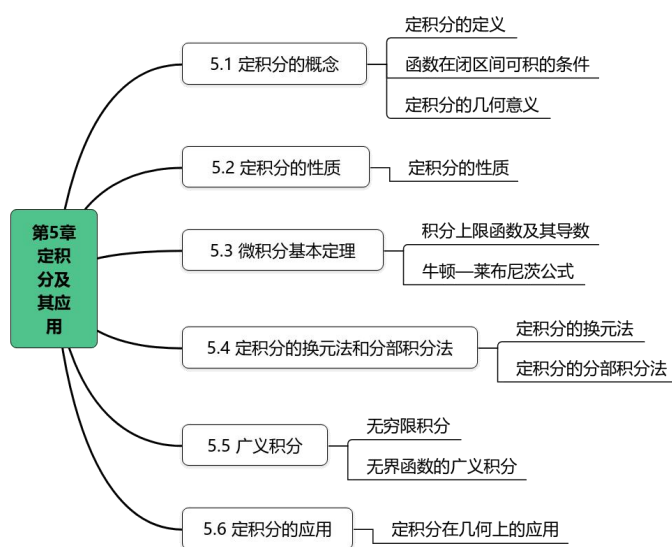
## 第5章 定积分及其应用

授课题目	§ 5.1 定积分的概念 § 5.2 定积分的性质	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解定积分的概念及其几何意义。学生能够准确理解定积分的定义，即函数在某一区间上的和式极限。学生能够理解定积分与曲边梯形面积之间的联系，并会用定积分表示曲边梯形的面积。 2. 了解定积分的性质。学生能够熟悉并掌握定积分的基本性质，如线性性质、区间可加性、积分中值定理等。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的逻辑推理能力。学生能够理解和运用定积分中的归纳、类比等逻辑推理方法。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。培养学生的数学思维和数学素养，使他们能够用数学的眼光看待世界，用数学的语言描述世界，例如“古生物博物馆”的建筑形态。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 定积分的定义和性质。 <b>教学难点：</b> 定积分的性质。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动

## 第5章的章节介绍:

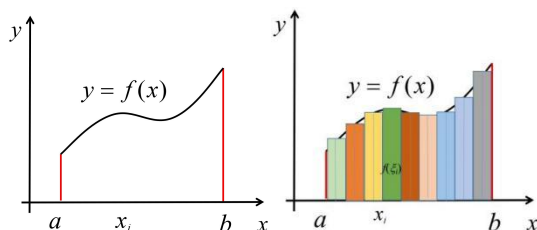
前边我们学习了不定积分, 本章将讨论积分学的另一个基本问题——定积分. 定积分的概念源于对物理量或数学量的一些计算, 诸如研究不规则图形的面积、体积、长度及变力做功、液体中闸门的静压力等量的计算, 但随着研究的不断深入, 定积分已应用到生物、经济、商业与金融等领域, 成为建立数学模型的一种重要手段.

本章将介绍定积分的概念、性质及有关定理, 定积分与不定积分的关系, 定积分的计算、简单的应用及广义积分初步等知识.



### 一、导入新课

曲边梯形是由连续曲线  $y=f(x)$  与  $x$  轴、直线  $x=a$  和  $x=b$  形成, 怎么求其面积?



如上图所示:

1. 分割: 在  $[a, b]$  中任意插入  $n-1$  个分点记作:  $x_i$ .
2. 近似化: 在任意的区间  $[x_{i-1}, x_i]$  中取点  $\xi_i$ , 则小面积近似为:  $\Delta x_i f(\xi_i)$ .
3. 求和:  $A \approx \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$ .
4. 求极限:  $\lambda = \max\{\Delta x_i, i=1, \dots, n\}$ ;  $A \approx \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$ .

### 二、讲解新知

#### 1. 定积分的概念

以思维导图的形式展示章节内容, 启发学生在学习中要养成逻辑性, 要有知识体系, 才能清晰知识与知识之间的联系。

组织学生讨论: 如何求曲边梯形的面积? 激发学生大胆创新。

重点 1: 定积分的概念。

### (1) 概念

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 在区间  $[a, b]$  内插入若干分点:  $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$ , 记:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ , 在任意的区间  $[x_{i-1}, x_i]$  中取点  $\xi_i$ , 作和得:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i P(\xi_i),$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时, “和式”的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i P(\xi_i)$$

存在, 且极限值与区间  $[a, b]$  的分法和  $x_i$  的取法无关, 则称

此极限为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分:  $\int_a^b f(x) dx$ ,

即:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i),$$

其中,  $a$  为积分下限,  $b$  为积分上限.

#### 关于定积分定义的几点说明:

1)  $\int_a^b f(x) dx$  是一个  $n$  项和的极限, 是一个确定的常数;

2)  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i P(\xi_i)$  的极限存在时, 其极限值仅与被积函数和

积分区间有关, 与区间的分法和  $x_i$  的取法无关。

3) 定积分的值与积分变量用什么字母表示无关, 即有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

例 1 由曲线  $y = x^2 + 1$  和直线  $x = 1$ 、 $x = 3$  及  $x$  轴围成的曲边梯形的面积, 用定积分怎么表示?

解: 用定积分表示为:  $\int_1^3 x^2 + 1 dx$ .

例 2 定积分  $\int_{-2}^2 \sin 3x dx$  表示的是由\_\_\_\_\_构成的面积?

解: 由曲线  $y = \sin 3x$  和直线  $x = -2$ 、 $x = 2$  及  $x$  轴围成的曲边梯形的面积.

### (2) 函数的可积性

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分存在, 则称  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积.

**定理 1 (充分条件)** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积.

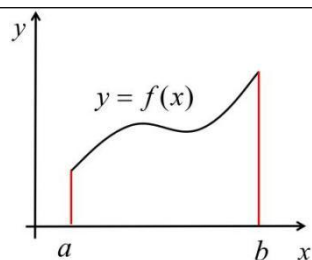
**定理 2 (充分条件)** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积.

## 2. 定积分的几何意义

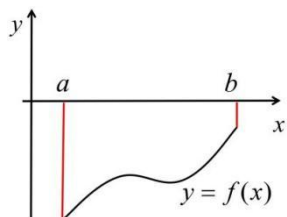
$$\text{针对 } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i):$$

(1) 当  $f(x) \geq 0$  时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分表示由曲线  $y = f(x)$ 、直线  $x = a$ 、 $x = b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积.

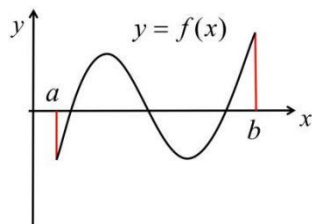
定积分的几何意义: 讨论三种情况, 加深理解。同时, 举例“古生物博物馆”建筑形似定积分, 培养学生利用数学知识欣赏世界之美。



(2) 当  $f(x) \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分表示由曲线  $y=f(x)$ 、直线  $x=a$ 、 $x=b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积的负值.



(3) 当  $f(x)$  的符号不确定时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分表示由曲线  $y=f(x) > 0$ 、直线  $x=a$ 、 $x=b$  与  $x$  轴所围成的面积减去曲线  $y=f(x) < 0$ 、直线  $x=a$ 、 $x=b$  与  $x$  轴所围成的面积.



例 3 利用定积分的几何意义求  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

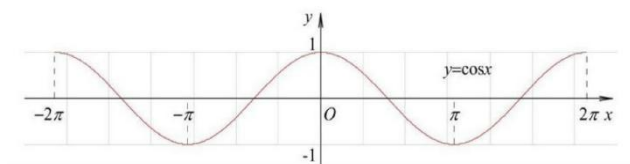
解: 几何意义: 圆的  $1/4$  面积,  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x=0$ ,  $x=1$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

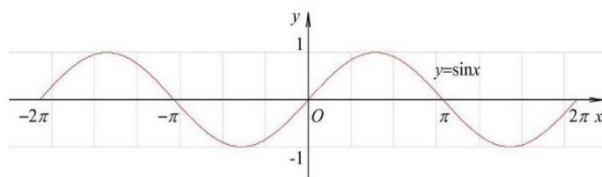
例 4 用定积分的几何意义求:

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos x dx; (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx; (3) \int_{-1}^1 |x| dx.$$

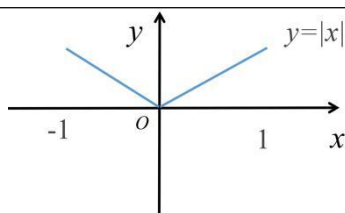
解: (1) 原式=0.



(2) 原式=0.



(3) 原式=1.



### 3. 定积分的性质

当  $a = b$  时,  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

当  $a > b$  时,  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

**性质 1:** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  可积, 则:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

**性质 2:**  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ .

**性质 3:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

**性质 4:**  $\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$ .

**例 5** 已知  $\int_1^4 f(x)dx = 3$ , 求:

$$\int_2^2 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx - \int_4^2 f(x)dx + \int_1^4 5dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= 0 + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + 5 \int_1^4 1dx \\ &= 0 + \int_1^4 f(x)dx + 5 \times 3 \\ &= 0 + 3 + 15 = 18 \end{aligned}$$

**性质 5:** 在  $[a, b]$  上, 若  $f(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), 则  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

**性质 6:** 在  $[a, b]$  上, 若  $f(x) \geq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

**推论:**  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

**性质 7:** 设  $M$  和  $m$  分别是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值, 则  $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$ .

**随堂练习 1** 比较下列积分的大小:

$$(1) \int_1^2 xdx \text{ 与 } \int_1^2 x^2 dx, (2) \int_0^2 \ln x dx \text{ 与 } \int_0^2 \ln^2 x dx.$$

$$\text{解: (1) } x \in [1, 2], \Rightarrow x^2 \geq x, \Rightarrow \int_1^2 xdx \leq \int_1^2 x^2 dx$$

$$(2) x \in [0, 2], \Rightarrow \ln x \leq 0 \leq \ln^2 x, \Rightarrow \int_0^2 \ln x dx \leq \int_0^2 \ln^2 x dx.$$

**例 6** 估计积分的值:  $\int_1^2 x^3 dx$ .

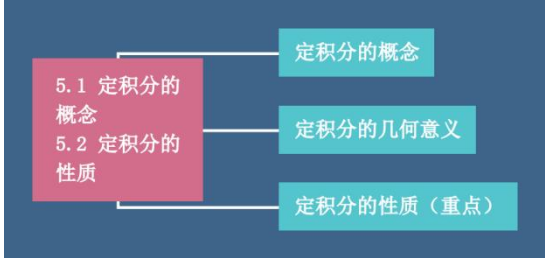
**解:** 由于被积函数  $x^3$  在  $[1, 2]$  上单调递增, 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为 1 和 8, 根据

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M, \text{ 推出 } \Rightarrow 1 \leq \int_1^2 x^3 dx \leq 8.$$

**性质 7:** (定积分中值定理) 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在积分区间  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使

**重点 2 (也是难点):** 定积分的性质。

**随堂练习 1:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。

<p><math>\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)</math> 成立.</p> <p>随堂练习 2 求极限: <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]</math>.</p> <p>解: 原式 <math>= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{i}{n} \pi</math>, <math>x_i = \frac{i}{n} \pi</math>, <math>\Delta x_i = \frac{1}{n} \pi</math></p> $= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{i}{n} \pi$ $= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i f(\xi_i)$ $= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx .$ <p>三、课程小结</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 定积分的定义</li> <li>2. 定积分的几何意义</li> <li>3. 定积分的性质</li> </ol> <p>四、布置作业</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考: 定积分与不定积分的区别?</li> </ol> <p>五、板书设计</p> 	<p>随堂练习 2: 首先引发思考: 极限如何转化成的定积分? 其次利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。同时也帮助学生再次理解定积分的定义。</p> <p>课后思考: 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去回顾已学知识, 并对知识进行梳理。</p>
<p>教学反思</p>	
<p>1. 成功之处</p> <p>在教学过程中, 我利用多媒体手段辅助教学, 使用动画演示定积分的几何意义, 使学生更直观地理解。同时, 借助“古生物博物馆”建筑形态, 加深学生对定积分的认识, 从而培养了学生利用数学语言去形容世界万事万物之美。</p> <p>2. 存在问题</p> <p>在讲课中, 由于时间限制, 我没有及时给予学生足够的反馈和指导, 导致他们无法及时纠正错误和弥补不足。</p> <p>3. 改进措施</p> <p>在今后, 授课结束后, 及时给予反馈, 及时给予学生反馈和指导, 帮助他们纠正错误和弥补不足。</p>	



授课题目	§ 5.3 微积分基本定理	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握积分上限函数及其导数。 2. 理解微积分基本定理。学生应能够清晰理解微积分基本定理的含义，包括不定积分与定积分之间的关系，以及如何通过求原函数来求解定积分。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的计算能力。学生应能够熟练运用微积分基本定理进行计算，包括求解定积分、求原函数等。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学文化素养。学生了解牛顿和莱布尼茨的数学故事，了解和学习数学文化，提高数学素养。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 积分上限函数及其导数、牛顿-莱布尼茨公式。 <b>教学难点：</b> 积分上限函数及其导数。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b>  变速直线运动中位置函数与速度函数的联系： 设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上关于 $t$ 的一个连续函数，且 $v(t) \geq 0$ ，求物体在这段时间内所经过的路程。  分割 $dt$ ：变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$ ； 该段路程也可表示为： $s(T_2) - s(T_1)$ ；		

即:  $\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1)$ ,  $\Rightarrow s'(t) = v'(t)$ .

## 二、讲解新知

### 1. 积分上限函数及其导数

#### (1) 积分上限函数的定义

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 并设  $x$  为  $[a, b]$  上的一点, 有  $\int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$ .

若上限  $x$  在  $[a, b]$  上任意变动, 则对于每一个取定的  $x$  值, 定积分有一个对应的值, 因此在  $[a, b]$  上定义了一个函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 即为积分上限函数.

#### (2) 积分上限函数的性质

**定理 1:** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则积分上限

函数在  $[a, b]$  上具有导数:  $\Phi'(x) = \frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = f(x)$ .

证明:  $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

由积分中值定理可得:  $\Delta \Phi = f(\xi) \Delta x$ ,  $\xi \in [x, x + \Delta x]$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

$\because \Delta x \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow x$ ,  $\therefore = f(x)$ .

**定理 2:** 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则积分上限

函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  是  $f(x)$  的一个原函数.

定理的重要意义:

- 1) 肯定了连续函数的原函数是存在的.
- 2) 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

**例 1** 设  $\varphi(x) = \int_0^x \sin(1 + e^t) dt$ , 求  $\varphi'(x)$ .

**解:** 由定理 1 可知  $\Phi'(x) = \frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = f(x)$ ,

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{d \int_0^x \sin(1 + e^t) dt}{dx} = \sin(1 + e^x).$$

**例 2** 设  $\varphi(x) = \int_x^0 e^{-t^2} dt$ , 求  $\varphi'(x)$ .

**解:** 由定理 1 可知  $\Phi'(x) = \frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = f(x)$ , 先将原积分变换成变上限函数的形式, 即  $\varphi(x) = -\int_0^x e^{-t^2} dt$ , 则  $\varphi'(x) = -e^{-x^2}$ .

**例 3** 设  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ , ( $x > 0$ ), 求  $\varphi'(x)$ .

**重点 1 (难点):** 积分上限函数及其导数.

组织学生讨论: 如何证明定理 1。一方面培养自主思考探索的能力, 另一方面督促学生温故重点内容导数。

解：令  $u = x^2$ ， $\varphi(x) = \int_0^u \sin \sqrt{t} dt$ ， $(x > 0)$ ，

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{d \int_0^u \sin \sqrt{t} dt}{du} \frac{du}{dx} = \sin \sqrt{u} \cdot 2x = 2x \sin x.$$

**结论 1：**当上限是复合函数时，即  $\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ ，采用复合函数求导法则： $\varphi'(x) = f[g(x)]g'(x)$ 。

例 4 设  $\varphi(x) = \int_x^{x^2} t^3 dt$ ，求  $\varphi'(x)$ 。

$$\text{解： } \varphi(x) = \int_x^0 t^3 dt + \int_0^{x^2} t^3 dt = -\int_0^x t^3 dt + \int_0^{x^2} t^3 dt，$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = -x^3 + 2x^7.$$

$$\begin{aligned} \text{结论 2：} \frac{d \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t) dt}{dx} &= \frac{d(\int_{\varphi(x)}^0 f(t) dt + \int_0^{g(x)} f(t) dt)}{dx} \\ &= -f[\varphi(x)]\varphi'(x) + f[g(x)]g'(x). \end{aligned}$$

随堂练习 1 设  $\varphi(x) = \int_0^x f(t)(x-t) dt$ ，其中  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续，求  $\varphi'(x)$ 。

$$\text{解： } \varphi(x) = \int_0^x (xf(t) - tf(t)) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt，$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

随堂练习 2 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$ 。

$$\text{解：采用洛必达法则，原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

## 2. 牛顿——莱布尼茨公式

**定理 3（微积分基本定理）：**若函数  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数，则：

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = (F(x))|_a^b，$$

该公式即为牛顿——莱布尼茨公式。

证明：已知： $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数，根据积分上限函数， $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  是  $f(x)$  的一个原函数。因此， $\Phi(x) - F(x) = C$ ， $x \in [a, b]$ ：

$$\text{当 } x = a, \Phi(a) - F(a) = 0 - F(a) = C \Rightarrow F(a) = -C.$$

$$\Phi(x) - F(x) = \int_a^x f(t) dt - F(x) = C \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = -F(a) + F(x).$$

$$\text{当 } x = b, \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = -F(a) + F(b).$$

当  $a > b$  时，该公式仍然成立。

微积分基本公式表明：一个连续函数在区间  $[a, b]$  上的定积分等于它的任意一个原函数在区间  $[a, b]$  上的增量。

**实质：求定积分问题转化为求原函数的问题。**

例 5 求  $\int_a^b x dt$ 。

$$\text{解：求出被积函数的一个原函数：} \frac{1}{2} x^2，$$

**结论 1-2：**与学生一起以归纳的方式得出结论，有助于学生掌握解题技巧。

**随堂练习 1-2：**利用学习通平台发布习题，学生作答后上传答案及时批改，并对存在典型错误的学生指出问题，同时警示其他同学避免出现相同错误。这两个练习可以培养学生解题的创新意识。

**重点 2：**牛顿——莱布尼茨公式。

**课程思政：**简短地讲述牛顿和莱布尼茨关于创立定积分的故事，帮助学生了解和学生数学文化知识。从而加深对公式的记忆。

数学史上最精彩的斗争——牛顿与莱布尼茨的积分战争

1687 - 1689 - 1692 - 1693 - 1701 - 1704 - 1705 - 1716

近 30 年来人类数学史上，为了争得微积分的优先权而引发的战争，在数学史上是数一数二的。这一事件对后世影响深远，也为我们今天提供了一个关于科学、哲学、法律和历史的绝佳案例。



莱布尼茨



牛顿

<p>则原式 <math>= [\frac{1}{2}x^2]_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2</math>.</p> <p><b>例 6</b> 求 <math>\int_{-1}^3 (x^3 + 2)dt</math>.</p> <p><b>解:</b> 求出被积函数的一个原函数: <math>\frac{1}{4}x^4 + 2x</math>,</p> <p>则原式 <math>[\frac{1}{4}x^4 + 2x]_{-1}^3 = \frac{81}{4} + 6 - \frac{1}{4} + 2 = 28</math>.</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 原函数、不定积分的概念及其性质</li> <li>2. 熟记基本积分公式.</li> <li>3. 掌握不定积分的基本公式</li> <li>4. 掌握不定积分的直接积分法</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. <b>思考:</b> 定积分的求解有哪些方法?</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> <div data-bbox="301 972 940 1158"> </div>	<p><b>课后思考:</b> 布置课后思考, 培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我注重与学生的互动, 通过提问、讨论等方式激发学生的学习兴趣, 帮助他们主动思考; 讲述了牛顿和莱布尼茨关于微积分创立的数学纷争, 大大地提高了学生学习兴趣。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在讲课中, 难度控制不当, 在选取例题和习题时, 我没有很好地控制难度梯度。另外, 教案中的例题准备不充分。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课准备中, 我将根据学生的实际情况, 合理设计题目难度, 确保每个学生都能得到适当的挑战和成长; 将增加例题, 并提供多样化的例题, 以满足不同学生的需求, 帮助他们巩固和深化理解。</p>	

授课题目	§ 5.4 定积分的换元法和分部积分法	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握定积分的换元法。掌握定积分换元法的定理，即假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且函数 $x=\varphi(t)$ 满足一定条件时，如何应用换元法求解定积分。 2. 掌握定积分的分部积分法。掌握分部积分公式及其推导过程，了解如何根据被积函数的特点选择合适的 $u$ 和 $dv$ 。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和计算能力。能够根据题目要求，分析选择合适的积分方法，计算定积分。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学应用素养。培养学生的数学应用意识，使他们能够将定积分的换元法和分部积分法应用于实际问题中，解决实际问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 定积分的换元法、分部积分法。 <b>教学难点：</b> 定积分的换元法。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 回顾不定积分导入新课。 <b>第一类换元积分法：</b> 例如： $\int 2 \cos 2x dx = \int \cos 2x d(2x) = \sin 2x + C$ 。 <b>第二类换元积分法：</b>		

例如:  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ , 令  $x = \sin t$ , 原式  $= \int \cos^2 t dt$ .

## 二、讲解新知

### 1. 定积分的换元积分法

**定理:** 假设 (1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续;

(2) 函数  $x = \varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上是单值的且有连续的导数;

(3) 当  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  上变化时,  $x = \varphi(t)$  在  $[a, b]$  上变化,

且  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ; 则:  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ , 即为

#### 定积分的换元公式.

**注意:** (1) 在利用  $x = \varphi(t)$  换元时, 积分的上下限也要进行替换, 对应的是  $t$  的取值范围;

(2) 求出  $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$  的原函数后, 不必将原函数变为关于  $x$  的函数, 只需利用  $t$  的取值范围 (上下限) 进行求解

即可. 即:  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = [\Phi(t)]_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ .

例 1 求  $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$ .

**解:** 令  $x^2 = t$ ,  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $x = 1 \Rightarrow t = 1$ ,  $dt = 2x dx$

则原式  $= \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$ .

例 2 求  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

**解:** 令  $x = \sin t$ ,  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ,  $dx = \cos t dt$

则原式  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2t}{2} + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

随堂练习 1 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 证明:

(1) 若  $f(x)$  为偶函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;

(2) 若  $f(x)$  为奇函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ;

**证:** 令  $x = -t$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx, \end{aligned}$$

(1)  $\because f(t) = f(-t)$ ,

$$\text{原式} = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(2)  $\because f(t) = -f(-t)$ ,

$$\text{原式} = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

例 3 若  $f(x)$  是连续的周期函数, 周期为  $T$ , 证明: 对于任

**重点 1 (难点):** 定积分的换元积分法.

**随堂练习 1:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误.

**例 3** 为拓展题, 具有较大的难度. 采用多媒体和电子手

意的常数  $a$ , 都有

$$(1) \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

$$(2) \quad \int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}), \text{ 并由此计}$$

$$\text{算 } I = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx.$$

$$\text{证: } (1) \quad \Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx,$$

$$\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0,$$

$$\Phi(a) = C = \Phi(0) \Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

$$(2) \quad \Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \dots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx$$

$$= \int_0^T f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \dots + \int_0^T f(x)dx$$

$$= n \int_0^T f(x)dx.$$

$$I = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx = n \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

$$= n \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} dx$$

$$= n \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= n \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx = n\sqrt{2} \int_0^{\pi} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| dx$$

$$= n\sqrt{2} \left( \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx \right) = 2\sqrt{2}n.$$

## 2. 定积分的分部积分法

**定理:** 假设函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的导数, 则  $\int_a^b u(x)d(v(x)) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)d(u(x))$  即为 **定积分的分部积分公式**.

**例 4** 求  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ .

$$\text{解: 原式} = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d(\arcsin x)$$

$$= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

写板结合的方式, 以严谨的逻辑讲解此题, 培养学生的数学逻辑素养。

**重点 2:** 定积分的分部积分法。

$$\begin{aligned}
 &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\
 &= \frac{\pi}{12} + [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

例 5 求  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ .

解: 原式  $\xrightarrow{\sqrt{x}=t} 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t d(e^t)$

$$\begin{aligned}
 &= 2[te^t]_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt \\
 &= 2[te^t]_0^1 - 2[e^t]_0^1 = 2.
 \end{aligned}$$

例 6 求  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$ .

解: 原式  $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

随堂练习 2 设  $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

解: 原式  $= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x^2) = \frac{1}{2} [x^2 f(x)]_0^1 - \int_0^1 x^2 d(f(x))$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{\sin x^2}{x^2} 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 d(x^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 1 - 1).
 \end{aligned}$$

### 三、课程小结

1. 定积分的换元法: 第一类和第二类
2. 分部积分法:

$$\int_a^b u(x) d(v(x)) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) d(u(x)).$$

### 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业
3. 思考: 定积分与不定积分求解的区别与联系?

随堂练习 2: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。培养学生的综合素养。

课后思考: 布置课后思考,



<p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>培养学生自主思考的学习能力。这也是督促学生去预习后续知识。</p>
<p><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我按照从易到难、从理论到应用的顺序，逐步引导学生掌握定积分的换元法和分部积分法。整个教学过程逻辑清晰，有助于学生建立系统的知识体系。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在讲课中，随堂练习题量不够，学生的练习量偏少。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课准备中，我将增加练习量，并提供多样化的练习题，以满足不同学生的需求；并加强与学生的沟通，及时了解他们的学习情况，并给予针对性的指导。</p>	

授课题目	§ 5.5 广义积分	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解广义积分的概念。学生能够清晰理解广义积分（包括无限区间的广义积分和无界函数的广义积分）的基本概念，认识到其与定积分之间的区别与联系。 2. 掌握广义积分的计算方法。学生能够掌握广义积分的计算方法，包括如何正确选择积分限、如何进行变量替换、如何处理被积函数中的无穷间断点等。	
	<b>能力目标：</b> 提高学生的运算能力。通过大量的练习和实践，提高学生的运算能力，使学生能够熟练地进行广义积分的计算。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学应用素养。通过广义积分的学习，培养学生的数学素养，使他们能够理解并欣赏微积分在数学、物理、工程等领域中的广泛应用。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 无有限积分和瑕积分。 <b>教学难点：</b> 瑕积分的求解。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 回顾定积分导入新课.		
<b>二、讲解新知</b> <b>1. 无穷限积分</b>		



### 重点 1: 无穷限积分。

(1) 无穷限积分: 有界函数在无穷区间上的积分.

**定义 1:** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  (无穷区间) 上连续, 取  $b > a$ , 若极限  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称此极限是函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的反常积分,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , 当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

**定义 2:** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  (无穷区间) 上连续, 取  $a > b$ , 若极限  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称此极限是函数  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上的反常积分,  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ , 当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

**定义 3:** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  (无穷区间) 上连续, 若极限  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 、 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  存在, 则称此极限是函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的反常积分,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ , 当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

结合牛顿—莱布尼茨公式可得如下结果:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty) = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

例 1 求  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^b \\
 &= -\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b \\
 &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} .
 \end{aligned}$$

例 2 求  $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^b \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \cos \frac{1}{x} \right]_{\frac{2}{\pi}}^b
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2} \right] \\ = 1.$$

例3 讨论证明反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  在  $p > 1$  时收敛, 在  $p \leq 1$  时发散.

解: 当  $p = 1$  时, 原式  $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_1^b = +\infty$ ,

当  $p \neq 1$  时, 原式  $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$

因此, 当  $p > 1$  时, 收敛; 当  $p \leq 1$  时, 发散.

## 2. 瑕积分

**瑕积分:** 无界函数在有限区间上的积分.

**定义:** 当被积函数  $f(x)$  在有限区间  $[a, b]$  上存在无界的点 (有限个), 则称  $\int_a^b f(x) dx$  为瑕积分. 使  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界的点为瑕点.

1) 若  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续,  $a$  是  $f(x)$  的瑕点, 此时若极限  $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为  $f(x)$  在  $(a, b]$  上的反常积分. 记作:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ . 当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

2) 若  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续,  $b$  是  $f(x)$  的瑕点, 此时若极限  $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$  存在, 则称此极限为  $f(x)$  在  $[a, b)$  上的反常积分. 记作:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ . 当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

3) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上除点  $c$  外都连续,  $c$  是  $f(x)$  的瑕点, 此时若积分  $\int_a^c f(x) dx$ 、 $\int_c^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的反常积分. 记作:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx,$$

当极限存在时, 称反常积分收敛; 当极限不存在时, 称反常积分发散.

例4 求  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

解:  $x = 1$  是瑕点,

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

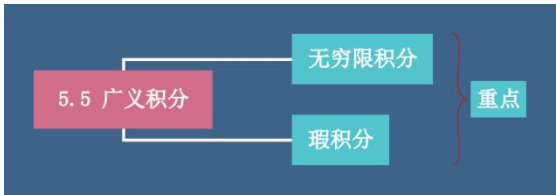
$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^t = \lim_{x \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ 收敛.}$$

例5 求  $\int_0^3 \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^{\frac{2}{3}}}} dx$ .

解:  $x = 1$  是瑕点,

组织学生讨论: 如何证明例3. 一方面培养自主思考探索的能力, 另一方面督促学生温故重点内容导数.

重点2 (也是难点): 瑕积分.

<p>原式 = <math>\int_0^1 \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^{\frac{2}{3}}}} dx + \int_1^2 \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^{\frac{2}{3}}}} dx</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big _0^1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{3}} \Big _1^2 = 1 + \sqrt[3]{2}</math> 收敛.</p> <p>随堂练习 求 <math>\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx</math> .</p> <p>解: <math>x=1</math> 是瑕点,</p> <p>原式 = <math>\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln(\ln x)]_t^2 = \ln(\ln 2) - \lim_{t \rightarrow 1^+} \ln(\ln t)</math></p> <p><math>= \infty</math> 发散.</p> <p>三、课程小结</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 无穷限积分</li> <li>2. 瑕积分 (注意: 不能忽略内部的瑕点)</li> </ol> <p>四、布置作业</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 查阅: 广义积分的应用有哪些?</li> </ol> <p>五、板书设计</p> 	<p>随堂练习: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。同时也揭露瑕积分与定积分的区别。</p> <p>布置课后查阅: 培养学生独立思考, 自行探索所学知识的应用, 对所学专业有何帮助。</p>
<p>教学反思</p>	
<p>1. 成功之处</p> <p>本节课, 我延续保持与学生勤互动, 通过提问、讨论等方式激发学生的学习兴趣, 帮助他们主动思考。大多数学生对广义积分的学习表现出较高的积极性, 愿意主动思考和解决问题。</p> <p>2. 存在问题</p> <p>在讲课中, 缺乏对理论知识的实际应用说明。</p> <p>3. 改进措施</p> <p>在今后的授课准备中, 我将增加实践环节, 设计更多的实践环节, 让学生将所学知识应用到实际问题中, 提高他们的实际应用能力。</p>	

授课题目	§ 5.6 定积分的应用	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 理解并掌握定积分在几何中的应用。学生能够理解定积分在求解平面图形面积、体积、曲线长度等问题中的应用，并能掌握相应的求解方法。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和建模能力。学生能够分析和识别问题中的关键量，并将其转化为数学定积分问题。同时，学生能够根据问题的具体情况选择合适的坐标系和求解方法。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学应用素养。通过解决实际问题，培养学生的应用意识和应用能力，使他们能够灵活运用所学的数学知识解决生活和工作中的实际问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 利用定积分求面积、求旋转体的体积。 <b>教学难点：</b> 利用定积分求旋转体的体积。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 回顾曲边梯形求面积四步法导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 微元法</b> 当所求量 $A$ 符合下列条件： (1) $A$ 是与一个变量 $x$ 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量； (2) $A$ 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，就是说，如果把		回顾以提问的方式进行。

区间  $[a, b]$  分成许多部分区间, 则  $A$  相应地被分成许多部分量, 而  $A$  等于所有部分量之和;

(3) 部分量  $\Delta A_i$  的近似值可表示为  $\Delta x_i f(\xi_i)$ 。

——即可考虑用定积分来表达这个量  $A$

### 元素法的一般步骤:

(1) 利用“化整为零, 以常代变”求出局部量的近似值, 即求出微分表达式:  $dA = f(x)dx$ ;

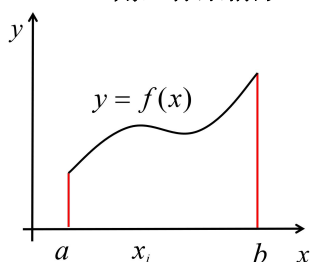
(2) 利用“积零为整, 无限累加”求出整体量的精确值, 即求出积分表达式:  $A = \int_a^b f(x)dx$ ;

——该分析方法称为**元素法** (或微元分析法)

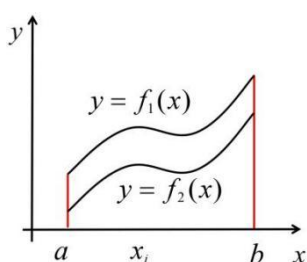
元素的几何形状常取为: 条、带、段、环、扇、片、壳 等。

## 2. 平面图形的面积

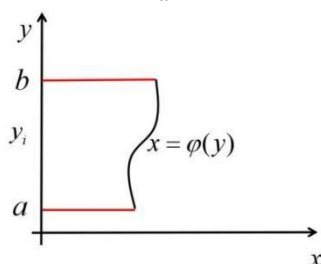
### (1) 直角坐标系情形



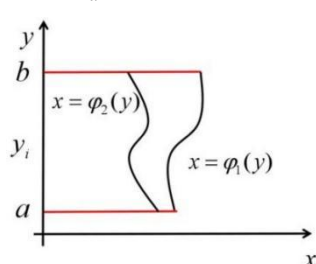
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$



$$A = \int_a^b \varphi(y)dy$$

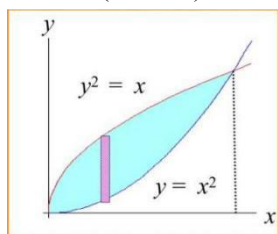


$$A = \int_a^b |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy$$

例 1 求由两条抛物线  $y = x^2$  和  $y^2 = x$  所围成的图形的面积.

解: 两曲线的交点:  $(0,0);(1,1)$ , 选  $x$  为积分变量:

$x \in [0,1]$ , 面积元素:  $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$ .



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

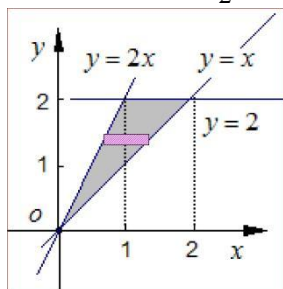
例 2 求由曲线  $y = x$  与  $y = 2x$  和  $y = 2$  所围成的平面图形的面积.

解: 两曲线的交点:  $(0,0);(1,2);(2,2)$ , 选  $y$  为积分变

**重点 1:** 平面图形求面积。  
也是本课程的重点。

绘制简要的图形帮助学生  
想象和理解。

量:  $y \in [0, 2]$ , 面积元素:  $dA = (y - \frac{y}{2})dy$ .

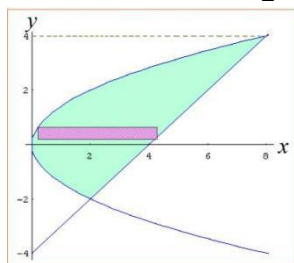


$$A = \int_0^2 (y - \frac{y}{2})dy = \int_0^2 \frac{y}{2}dy = 1.$$

例3 求由曲线  $y^2 = 2x$  与直线  $y = x - 4$  所围成的平面图形的面积.

解: 两曲线的交点:  $(2, -2); (8, 4)$ , 选  $y$  为积分变量:

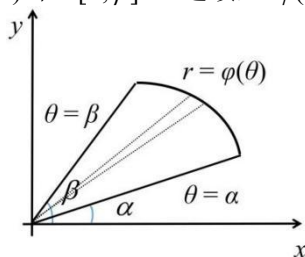
$y \in [-2, 4]$ , 面积元素:  $dA = (y + 4 - \frac{y^2}{2})dy$ .



$$A = \int_{-2}^4 (y + 4 - \frac{y^2}{2})dy = 18.$$

## (2) 极坐标系情形

设由曲线  $r = \varphi(\theta)$  及射线  $\theta = \alpha$ 、 $\theta = \beta$  围成一曲边扇形, 求其面积 ( $\varphi(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续且  $\varphi(\theta) \geq 0$ ).

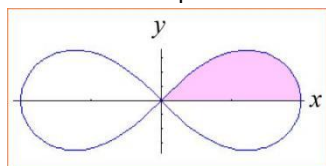


积分变量:  $\theta$ . 面积元素:  $dA = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$ .

曲边扇形的面积:  $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$ .

例4 求双纽线  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  所围成的平面图形的面积.

解:  $dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,



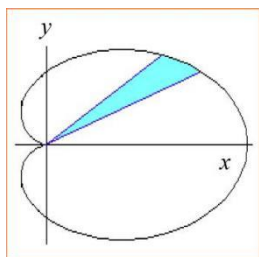
$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

组织学生讨论: 如何切割扇形? 找到面积元素。



例5 求心形线  $r = a(1 + \cos\theta)$  ( $a > 0$ ) 所围成的平面图形的面积.

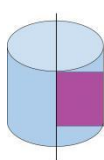
解:  $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,



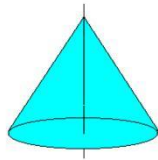
$$A = 2 \int_0^\pi a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta = a^2 \left[ \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

### 3. 旋转体的体积

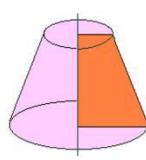
**旋转体:** 由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 该直线称作旋转轴.



圆柱



圆锥

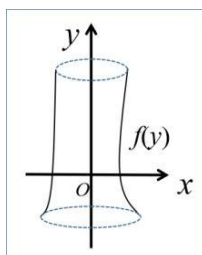
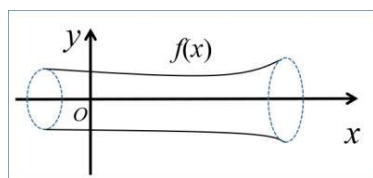


圆台

#### (1) 母线有一条曲线的情形

一般地, 如果旋转体是由连续曲线  $f(x)$ 、直线  $x = a$ 、 $x = b$  及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体, 体积为多少?

- 1) 取积分变量为  $x$ ,  $x \in [a, b]$ ,
- 2) 在  $[a, b]$  上任取小区间  $[x, x+dx]$ ,
- 3) 取以  $dx$  为底的窄边梯形绕  $x$  轴旋转而成的薄片的体积为体积元素:  $dV = \pi[f(x)]^2 dx$ ,
- 4) 旋转体的体积为:  $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$ .



#### (2) 母线有两条曲线的情形

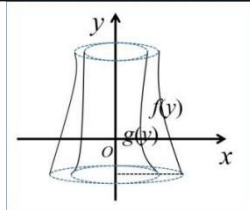
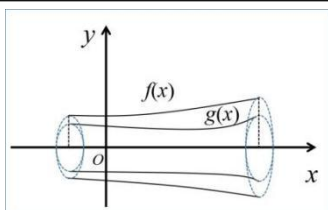
由两条连续曲线  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  和直线  $x = a$ 、 $x = b$  ( $a < b$ ) 所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体, 求其体

积为:  $V_x = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 dx$ ;

由两条连续曲线  $x = f(y)$ 、 $x = g(y)$  和直线  $y = c$ 、 $y = d$  ( $c < d$ ) 所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周而成的立体, 求其体

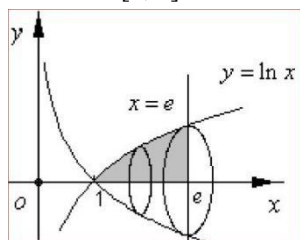
积为:  $V_y = \int_c^d \pi[f(y)]^2 dy - \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy$ .

重点2 (难点): 旋转体的体积。也是本课程的重难点。



**例 6** 求由直线  $y=0$ 、 $x=e$  及 曲线  $y=\ln x$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体的体积.

**解:** 积分变量为  $x$ ,  $x \in [1, e]$ ; 体积元素:  $dV = \pi[\ln x]^2 dx$ .

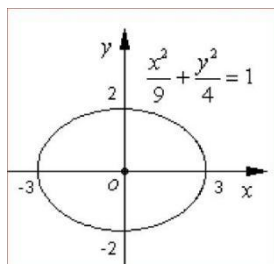


$$\begin{aligned} V &= \int_1^e \pi[\ln x]^2 dx = [\pi x[\ln x]^2]_1^e - \pi \int_1^e x d([\ln x]^2) \\ &= \pi e - 2\pi \int_1^e \ln x dx = \pi e - 2\pi. \end{aligned}$$

**随堂练习 1** 求椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周而成的立体的体积.

**解:** 如图, 积分变量为  $y$ ,  $y \in [0, 2]$ ; 体积元素:

$$dV = \pi(9 - \frac{9}{4}y^2)dy.$$

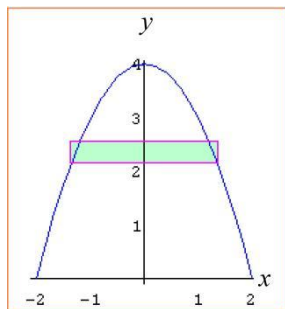


$$V = 2 \int_0^2 \pi(9 - \frac{9}{4}y^2)dy = 24\pi.$$

**随堂练习 2** 求由曲线  $y=4-x^2$  及  $y=0$  所围成的平面图形绕  $x=3$  旋转一周而成的立体的体积.

**解:** 如图, 积分变量为  $y$ ,  $y \in [0, 4]$ ; 体积元素:

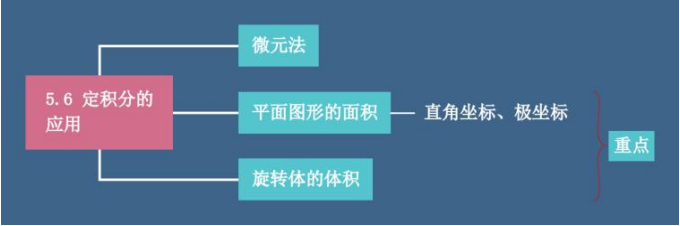
$$dV = \pi(3 + \sqrt{4-y})^2 - \pi(3 - \sqrt{4-y})^2 dy = 12\pi\sqrt{4-y} dy.$$



$$V = 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = 64\pi.$$

**三、课程小结**

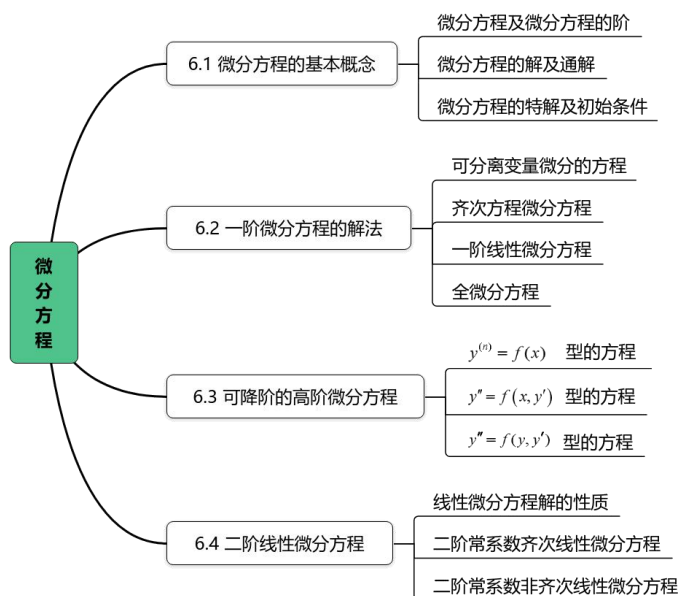
**随堂练习 1-2:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。这两个练习可以培养学生解题的想象力和巩固解题思路。

<p>1. 平面图形的面积（直角坐标系和极坐标系） 2. 旋转体的体积</p> <p><b>四、布置作业</b></p> <p>1. 教材的课后习题 2. 学习通上对应的作业 3. 思考：若 <math>x</math> 型区域绕着 <math>y</math> 轴转，那么体积如何求解？</p> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主思考的学习能力。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>我注重启发式教学，引导学生自己思考、探索和理解定积分的应用，采用多媒体辅助教学，利用多媒体手段、学习通平台以及手写板辅助教学，如使用动画演示或电子板书定积分求解过程，使学生更直观地理解定积分的应用。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>在讲课中，缺少跨学科联系，定积分在多个学科中都有应用，但我在教学中未能充分展示其跨学科的联系，限制了学生的视野和思维方式。另外，画图的标准度不够。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课准备中，我将（1）加强理论与应用结合：在教学中，我将更加注重理论与应用的结合，通过实际问题引入理论知识，让学生更好地理解和应用定积分；（2）选择贴近实际的案例：在选择案例时，我将更加注重案例的实用性和贴近性，让学生能够更好地理解和应用所学知识。在课后，也要勤加练习几何画图。</p>	

第 6 章 微分方程

授课题目	§ 6.1 微分方程的基本概念	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 理解微分方程的定义。学生能够明确微分方程是表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间关系的方程，理解微分方程的阶和解的概念。 2. 理解通解与特解。学生能够区分微分方程的通解（包含任意常数的解）和特解（满足特定初始条件的解），并掌握它们之间的关系。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的判断能力。学生能够根据解、通解与特解的定义，判断所给的解是否为微分方程的解、通解或特解。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的应用素养。引导学生将所学的微分方程知识应用于实际问题中，培养他们的应用意识和实践能力，使他们能够运用数学知识解决实际问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 微分方程的通解和特解。 <b>教学难点：</b> 微分方程的通解。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>第 6 章的章节介绍：</b> 在科学研究和生产实际中，经常要寻求表示客观事物的变量之间的函数关系。在许多实际问题中，往往不能直接得		

到所要研究的函数关系，只能根据所给的条件建立一个含有未知函数的导数或微分的关系式，我们把这个关系式称为微分方程. 因此，微分方程是描述客观事物的数量关系的一种重要数学模型. 本章我们就来研究常见的微分方程的类型及其解法，并介绍微分方程在实际问题中的一些简单应用.



## 一、导入新课

一条过点  $(1, 1)$  的曲线,该曲线上各点处的切线斜率等于该点横坐标平方的 3 倍, 求此曲线方程.

**解:** 设所求的曲线方程为  $y = y(x)$ , 根据导数的几何意义, 可知未知函数  $y = y(x)$  应满足关系式  $y' = 3x^2$  两边积分, 得  $y = x^3 + C$ , 因为曲线过点  $(1, 1)$ , 即有  $y|_{x=1} = 1$ , 将此条件代入方程中, 得  $C = 0$ . 故所求的曲线方程为:  $y = x^3$ .

## 二、讲解新知

### 1. 微分方程的基本概念

把形如实例中  $y' = 3x^2$  的关系式叫一阶微分方程, 而如  $y'' = 3x^2$ ,  $y''' = x^2 + 6$  分别叫二、三阶微分方程. 而  $y = x^3 + C$ ,  $y = x^3$  都叫微分方程  $y' = 3x^2$  的解. 因  $y = x^3 + C$  中含一个独立的任意常数, 又称它为微分方程  $y' = 3x^2$  的通解,  $y = x^3$  称作满足条件  $y|_{x=1} = 1$  的特解, 条件  $y|_{x=1} = 1$  叫做初始条件.

**定义 1:** 凡含有未知函数、未知函数的导数(或微分)以及自变量之间关系的方程称为微分方程.

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数,称为微分方程的阶.

未知函数是一元的叫做常微分方程, 未知函数是多元的叫做偏微分方程. 本章只讨论常微分方程, 简称微分方程.

以思维导图的形式展示章节内容, 启发学生在学习中要养成逻辑性, 要有知识体系, 才能清晰知识与知识之间的联系。

组织学生讨论: 如何求出该曲线方程。进而导入新课。

结合例子说明这些基本定义。

## 2. 微分方程的通解

**定义 2:** 能使微分方程成为恒等式的函数叫做微分方程的解. 如果微分方程的解中含有独立的任意常数, 且常数的个数与微分方程的阶数相同, 把这样的解叫做微分方程的**通解**.

由于通解中含有独立的任意常数, 所以它不能完全确定地反映某一客观事物的规律性, 要完全确定地反映某一客观事物的规律性必须确定这些常数的值, 为此要根据具体情况给出确定这些常数的条件.

一般地, 一阶微分方程常给条件  $y|_{x=x_0} = y_0$ , 二阶微分方程通解中由于有两个独立常数, 故需要两个条件, 一般为  $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_1$  等. 把这些条件叫做初始条件, 通过初始条件确定了通解中的任意常数后, 得到的微分方程的解叫做微分方程的特解.

**例 1** 某地考察人口数量  $y$  的增长情况, 已知人口数量  $y$  是关于时间  $t$  的函数, 根据自然规律, 该地区某时刻的人口增长率  $\frac{dy}{dt}$  与当时人口数量  $y$  成正比, 而这个比例系数是当时当地

的人口出生率  $m$  和人口死亡率  $n$  之差, 即  $\frac{dy}{dt} = (m-n)y$ ,

试判断人口增长率  $\frac{dy}{dt} = (m-n)y$  是否为微分方程? 若是, 指出阶数并判断  $y = e^{(m-n)t}$  是否为此方程的解?

**解:** 由微分方程的定义知,  $\frac{dy}{dt} = (m-n)y$  是一阶微分方程. 将  $y = e^{(m-n)t}$  求导得,  $\frac{dy}{dt} = e^{(m-n)t}(m-n)$ , 将其代入方程  $\frac{dy}{dt} = (m-n)y$  中,  $e^{(m-n)t}(m-n) = (m-n)y$ . 故  $y = e^{(m-n)t}$  是此方程的解.

**随堂练习** 验证  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$  ( $C_1, C_2$  为任意常数) 为  $y'' + 4y = 0$  的通解, 并求满足  $y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = -2$  的特解.

**解:** 由已知得  $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$ ,  
 $y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x$ ,

将  $y, y''$  代入方程  $y'' + 4y = 0$  的左端, 得  
 $(-4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x) + 4(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = 0$ ,  
所以  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$  为  $y'' + 4y = 0$  的解. 又因为此解中含两个任意常数, 故此解为  $y'' + 4y = 0$  的通解.

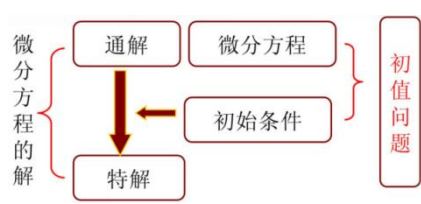
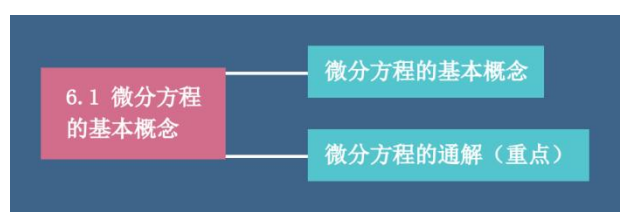
再将  $x=0, y=3$  和  $x=0, y'=-2$  代入  $y, y'$  中, 得  
$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$
, 故满足初始条件的解为  $y = 3 \cos 2x - \sin 2x$ .

**注意:** (1) 微分方程的解是函数, 通解是函数族;

重点(也是难点): 微分方程的通解。

**例 1:** 先组织学生讨论该案例, 然后在学习通平台设置抢答, 对表现好的学生加上课堂积分。

**随堂练习:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。培养学生自主思考和辨析能力。

<p>(2) 通解中的常数是独立的. 如 <math>y = C_1 e^x + C_2 e^{x+3}</math> 是某个二阶微分方程的解, 但不是通解, 这是因为 <math>y = C_1 e^x + C_2 e^{x+3} = (C_1 + C_2 e^3) e^x = C e^x</math>, <math>C = C_1 + C_2 e^3</math> 实际上只含一个独立常数;</p> <p>(3) 通解未必是全部解. 如 <math>y' = -y^2 \sin x</math>, 可验证 <math>y = -\frac{1}{\cos x + C}</math> 是它的解且是通解. 这里显然 <math>y \neq 0</math>, 但实际上 <math>y = 0</math> 满足原方程, 即 <math>y = 0</math> 也是它的解;</p> <p>(4) 并不是所有的微分方程都有通解. 如, <math>(y')^2 + 1 = 0</math> 无实数解.</p> <p><b>三、课程小结</b></p>  <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 预习：微分方程的种类及其求解方法？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>利用逻辑图的方式呈现本节课的主要内容，更能直观地进行总结。</p> <p>课后预习：布置课后预习，培养学生自主思考和学习的能力。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>本节课，我利用案例清晰地且具有逻辑地讲授了微分方程及其相关解的概念，学生反馈普遍较好。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>案例准备不足、教学方法缺乏创新性。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课准备中，我将根据学生的实际情况，合理设计题目难度，搜索典型案例，确保每个学生都能得到适当的挑战和成长。另外，可以通过设计互动环节、小组讨论等方式来提高学生的参与度和积极性。</p>	



授课题目	§ 6.2 一阶微分方程的解法	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 熟练掌握可分离变量的微分方程的解法，包括变量分离、积分求解等步骤。 2. 掌握齐次微分方程的解法，理解变量代换和求解过程。 3. 熟练掌握一阶线性微分方程的解法，包括常数变易法、通解公式等。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的辨析与解题能力。能够独立分析和求解给定的一阶微分方程。能够将实际问题转化为微分方程模型，并进行求解。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。培养学生的数学计算能力和数据处理能力，能够熟练进行微积分运算和求解微分方程。	
重点难点	<b>教学重点：</b> 可分离变量方程、齐次微分方程、一阶非齐次线性微分方程。 <b>教学难点：</b> 齐次微分方程的解法。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、讨论法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习微分方程的定义、解等内容导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 可分离变量方程</b> 形如 $f(x)dx = g(y)dy$ 的一阶微分方程称为 <b>可分离变量</b>		<b>重点 1：</b> 可分离变量方程的求解方法。



**方程.** 将两边同时积分得此方程的通解为

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

其中  $\int f(x)dx$  和  $\int g(y)dy$  分别表示  $f(x)$  和  $g(x)$  的一个具体原函数,  $C$  是任意常数.

凡是形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad f_1(x)f_2(y)dy + g_1(x)g_2(y)dx = 0$$

的一阶微分方程, 通过运算能够化为  $f(x)dx = g(y)dy$  的形式, 均称为**可分离变量方程**.

**例 1** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$  的通解.

**解:** 将方程变形为  $\frac{dy}{dx} = -xy^2$ , 这是一个可以分离变量的

方程, 分离变量, 得  $-\frac{dy}{y^2} = xdx$ ,

两边积分, 得  $y = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$  ( $C$  为任意常数).

**例 2** 求微分方程  $xdx - 3ydy = 3x^2ydy$  的通解.

**解:** 合并同类项, 得  $xdx = 3(x^2 + 1)ydy$ ,

分离变量, 得  $\frac{xdx}{(x^2 + 1)} = 3ydy$ ,

两边积分, 得  $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = \frac{3}{2}y^2 + C_1$ ,

即通解为  $\ln(x^2 + 1) = 3y^2 + C$  ( $C = 2C_1$ ).

**随堂练习 1** 求微分方程  $x^2ydx + (x^2y^2 + y^2 - x^2 - 1)dy = 0$  满足条件  $y|_{x=0} = 1$  的特解.

**解:** 分离变量, 得  $\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1-y^2}{y}dy$ ,

积分得通解为  $x - \arctan x - \ln|y| + \frac{1}{2}y^2 = C$ ,

由  $y|_{x=0} = 1$ , 得  $C = \frac{1}{2}$ ,

故所求特解为  $2(x - \arctan x) + y^2 - \ln y^2 = 1$ .

## 2. 齐次方程

如果一阶微分方程可化为  $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$  的形式, 则称此方

程为**齐次方程**. 例如,  $y' = \frac{x+y}{x-y}$  可化为  $y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ .

对于齐次方程, 通过变量替换可化为可分离变量方程来

**随堂练习 1:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误. 培养学生自主思考和辨析能力.

**重点 2 (也是难点):** 其次方程的求解方法.

<p>求解, 设 <math>u = \frac{y}{x}</math>, 则有 <math>\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}</math>,</p> <p>带入齐次方程, 得 <math>u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)</math>, 即 <math>x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u</math>,</p> <p>分离变量再积分, 得 <math>\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}</math>, 求出积分结果后,</p> <p>将 <math>\frac{y}{x} = u</math> 回代即可得出通解.</p> <p><b>例 3</b> 求方程 <math>\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}</math> 的通解.</p> <p><b>解:</b> 该方程为齐次方程, 设 <math>\frac{y}{x} = u</math>, 则 <math>\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}</math>,</p> <p>代入原方程有 <math>x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}</math>,</p> <p>分离变量, 得 <math>\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}</math>,</p> <p>两端积分, 得 <math>\sqrt{u} = \ln x  + C</math>, 即 <math>u = (\ln x  + C)^2</math>, 代回原来的变量, 得到通解为 <math>y = x(\ln x  + C)^2</math> (<math>C</math> 是任意常数).</p> <p><b>例 4</b> 求方程 <math>y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}</math> 的通解.</p> <p><b>解:</b> 原方程可写成 <math>\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1}</math>, 该方程为齐次</p> <p>方程, 设 <math>u = \frac{y}{x}</math>, 有 <math>\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}</math>,</p> <p>代入原方程, 得 <math>u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1}</math>, 即 <math>x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}</math>,</p> <p>分离变量, 得 <math>(1 - \frac{1}{u})du = \frac{dx}{x}</math>,</p> <p>两端积分, 得 <math>u - \ln u  + C = \ln x </math>,</p> <p>整理得 <math>\ln x u  = u + C</math>, 将 <math>u = \frac{y}{x}</math> 代回, 即可求得通解为</p> <p><math>\ln y  = \frac{y}{x} + C</math> (<math>C</math> 是任意常数).</p> <p><b>随堂练习 2</b> 求微分方程 <math>\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}</math> 满足初始条件 <math>y _{x=1} = \frac{\pi}{6}</math> 的特解.</p> <p><b>解:</b> 所求方程为齐次方程, 设 <math>\frac{y}{x} = u</math>, 有 <math>\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}</math>,</p>	<p><b>随堂练习 2:</b> 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误。培养学生自主思考和辨析能力。</p>
--	--

代入原方程, 得  $u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$ ,  
 分离变量, 得  $\cot u du = \frac{1}{x} dx$ ,  
 两端积分, 得  $\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln |C|$ , 即  $\sin u = Cx$ ,  
 将  $u = \frac{y}{x}$  代入, 则方程的通解是  $\sin \frac{y}{x} = Cx$ . 由  $y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$  得  
 $C = \frac{1}{2}$ , 故满足  $y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$  的特解为  $\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$ .

**注意:** 用变量代换改变方程的形状再求解, 是微分方程的一种常用方法. 若方程中出现  $\varphi(\frac{x}{y})$ 、 $\varphi(xy)$ 、 $\varphi(x \pm y)$ 、 $\varphi(x^2 \pm y^2) \cdots$ , 也可以用此法, 分别设  $u$  为  $\frac{x}{y}$ 、 $xy$ 、 $x \pm y \cdots$ .

### 3. 一阶线性微分方程

形如  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  的方程叫做一阶线性微分方程, 如果  $q(x) = 0$ , 则称为一阶齐次线性微分方程, 若  $q(x)$  不恒为零, 则称为一阶非齐次线性微分方程.

对于齐次线性微分方程  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ , 因为它是一个可分离变量方程, 分离变量得  $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ ,  
 两边积分后即得其通解为  $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ ,

若  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  是非齐次线性微分方程, 探讨其通解的求法.

由于齐次线性微分方程是非齐次线性微分方程的特殊情形, 两者有着密切的联系, 我们猜想两个方程的解之间也应该有联系, 而非齐次方程的解不可能再具有形式  $y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$  ( $C_1$  为常数), 这是因为将其代入  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  后, 左端一定是零, 不满足非齐次方程. 我们尝试将通解中的任意常数  $C$  换为不恒为零的函数  $C(x)$ , 得函数  $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$  下面看  $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$  能否成为非齐次方程的解.

将  $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$  代入  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  得:  
 $(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) = q(x)$ , 即:  
 $C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot [-p(x)] + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) = q(x)$ ,  
 化简, 得  $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ , 即  $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$ ,

**重点 3:** 一阶非齐次线性微分方程的求解方法.

常数变易法的证明具有较强的逻辑性, 整个过程与学生一起讨论分析, 最终确定该方法的公式, 记住该公式即可快速求出一阶非齐次线性微分方程的通解.

积分得  $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$ , 将  $C(x)$  代入

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \text{ 得 } y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

由直接检验可知,  $y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$  是非齐次线性微分方程的解, 又因为它含有一个任意常数, 所以它也是非齐次线性微分方程的通解, 此式可作为非齐次线性微分方程的通解公式. 这种求非齐次线性微分方程通解的方法, 称为**常数变易法**.

**例 5** 求方程  $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$  的通解.

**解:** 设  $p(x) = -\frac{2}{x+1}$ ,  $q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ , 代入公式

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right],$$

$$\text{得 } y = e^{\int \frac{2}{x+1} dx} \left[ \int (x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} dx + C \right]$$

$$= (x+1)^2 \left[ \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$$

$$= \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{7}{2}} + C(x+1)^2.$$

**例 6** 求  $x^2 dy + (2xy - x + 1)dx = 0$  满足初始条件  $y|_{x=1} = 0$  的特解.

**解:** 将方程变形为  $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{x-1}{x^2}$ , 则通解为

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int \frac{x-1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{2} x^2 - x + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

将初始条件  $y|_{x=1} = 0$  代入通解得  $C = \frac{1}{2}$ , 故特解为

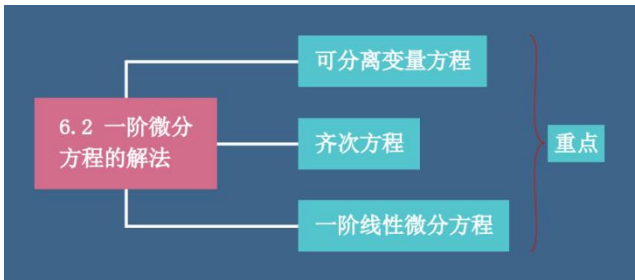
$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}.$$

**随堂练习 3** 求微分方程  $ydx + (x - y^3)dy = 0$  ( $y > 0$ ) 的通解.

**解:** 将方程改写为  $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = y^2$ , 将  $x$  看作  $y$  的函数, 是形如  $x' + p(y)x = q(y)$  的一阶线性微分方程. 得出此类线性微分方程的通解公式为

$$x = e^{-\int p(y)dy} \left[ \int q(y)e^{\int p(y)dy} dy + C \right],$$

**随堂练习 3:** 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误. 培养学生自主思考和辨析能力.

<p>利用此公式方程 <math>\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = y^2</math> 的通解为</p> $x = e^{-\int p(y)dy} \left[ \int q(y)e^{\int p(y)dy} dy + C \right]$ $= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[ \int y^2 e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right]$ $= \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{4} y^4 + C \right] = \frac{1}{4} y^3 + \frac{C}{y}.$ <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 可分离变量方程的通解解法</li> <li>2. 齐次微分方程的通解解法</li> <li>3. 一阶线性微分方程通解解法</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考：一阶微分方程求解对所学专业是否有用处？</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p>课后思考：布置课后思考，培养学生自主探索和学习的能力，明确高等数学对自己所学专业的意义。</p>
<p style="text-align: center;"><b>教学反思</b></p> <p><b>1. 成功之处</b></p> <p>本节课，我通过课堂观察、随堂练习等方式评估学生对一阶微分方程解法的掌握程度比较高，特别是对常数变易法的来源有着较高的好奇心，推导过程具有较强逻辑性，学生的参与度较好。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>教学方法的创新性不足。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>在今后的授课准备中，我将设计翻转课堂，让学生站上讲台讲解相关内容，提高学生的表现力，同时也鼓舞学生积极求学。</p>	

授课题目	§ 6.3 可降阶的高阶微分方程	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 掌握可降阶高阶微分方程的解法。学生应掌握如何通过适当的变量代换、积分等步骤将可降阶的高阶微分方程转化为更低阶的微分方程进行求解。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析问题的能力。学生应能够准确判断一个高阶微分方程是否可降阶，并确定其类型。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的数学素养。培养学生的数学思维和逻辑推理能力，能够用数学语言描述和解释问题。	
重点难点	<b>教学重点：</b> $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程。 <b>教学难点：</b> $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习一阶微分方程的求解方法导入新课。 <b>二、讲解新知</b> 二阶及二阶以上的微分方程统称为高阶微分方程.对于有些高阶微分方程，可以通过变量代换把它化为较低阶的微分方程求解，这种类型的方程称为可降阶的方程，求解方法		<b>复习方式：</b> 通过学习通随机抽取学生带领大家复习上节课的知识内容，提高学生对知识的掌握度。

称为降阶法。

### 1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

这种方程的特点是方程的右端只含有自变量  $x$ ，只要通过  $n$  次积分就可以得到通解。

例 1 求  $y''' = e^{3x} + \sin x$  的通解。

解：对原方程积分三次得

$$y'' = \int (e^{3x} + \sin x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \cos x + C_1,$$

$$y' = \frac{1}{9}e^{3x} - \sin x + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{27}e^{3x} + \cos x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

例 2 求方程  $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  满足条件  $y|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln 2}{2}$ ， $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1$  的特解。

解：积分一次得  $y' = \cot x + C_1$ ，将条件  $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1$  代入得， $C_1 = 0$ ，从而  $y' = \cot x$ ，再积分一次得，

$$y = \ln|\sin x| + C_2, \text{ 将条件 } y|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln 2}{2} \text{ 代入得, } C_2 = 0.$$

于是所求特解为  $y = \ln|\sin x|$ 。

### 2. $y''=f(x, y')$ 型的微分方程

这种方程的特点是不显含  $y$ 。求解的方法是：令  $y' = p$  则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ ，原方程变为  $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ ，这里  $p$  作为未知函数，设这个一阶微分方程的通解为  $p = g(x, C_1)$ ，即  $y' = g(x, C_1)$ ，再积分便可得到原方程的通解

$$y = \int g(x, C_1) dx + C_2.$$

例 3 求微分方程  $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$  的通解。

解：这是一个不显含  $y$  的方程。设  $y' = p$  则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ ，将  $y' = p$  和  $y'' = \frac{dp}{dx}$  代入原方程得  $(1+x^2)\frac{dp}{dx} - 2px = 0$ ，分离变量并积分，得

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx, \ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|,$$

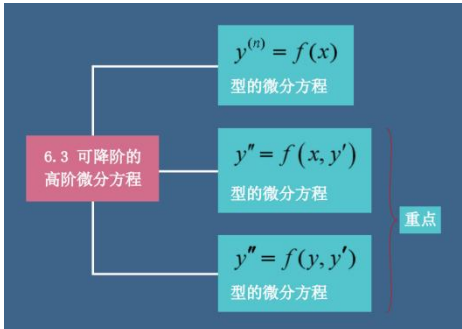
即  $p = C_1(1+x^2)$ ，从而  $\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2)$ ，再积分得通解

$$y = C_1(x + \frac{x^3}{3}) + C_2.$$

### 3. $y''=f(y, y')$ 型的微分方程

重点 1 (也是难点)： $y''=f(x, y')$  型的微分方程。

重点 2 (也是难点)：

<p>这种方程的特点是不显含 <math>x</math>. 求解的方法是: 把 <math>y</math> 暂时看成自变量. 设 <math>y' = p</math> 则 <math>y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}</math>, 原方程变为 <math>p \frac{dp}{dy} = f(y, p)</math>. 这是一个关于 <math>y, p</math> 的一阶微分方程, 求出此一阶微分方程的通解后, 再积分即可得原方程的通解.</p> <p><b>例 4</b> 求 <math>y'' + \frac{1}{1-y}(y')^2 = 0</math> 的通解.</p> <p><b>解:</b> 设 <math>y' = p</math> 则 <math>y'' = p \frac{dp}{dy}</math>, 将其代入原方程, 得 <math>p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y-1}</math>, 分离变量, 有 <math>\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y-1}</math>, 两边积分, 得 <math>\ln p = \ln(y-1) + \ln C_1</math>, 即 <math>p = C_1(y-1)</math>, 或 <math>\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)</math>. 分离变量再积分得通解为 <math>x = \frac{1}{C_1} \ln(y-1) + C_2</math>.</p> <p><b>随堂练习</b> 求 <math>y'' = y'^2 + 1</math> 的通解.</p> <p><b>解:</b> 设 <math>y' = p</math> 则 <math>y'' = \frac{dp}{dx}</math>, 代入原方程有, <math>\frac{dp}{dx} = p^2 + 1</math>, 分离变量并积分, 得 <math>\int \frac{1}{1+p^2} dp = \int dx</math>, <math>\arctan p = x + C</math> 即 <math>p = \tan(x + C_1) = \frac{dy}{dx}</math>, 再积分得 <math>y = -\ln  \cos(x + C_1)  + C_2</math>.</p> <p><b>三、课程小结</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>y^{(n)} = f(x)</math> 型的微分方程的求解</li> <li>2. <math>y'' = f(x, y')</math> 型的微分方程的求解</li> <li>3. <math>y'' = f(y, y')</math> 型的微分方程的求解</li> </ol> <p><b>四、布置作业</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教材的课后习题</li> <li>2. 学习通上对应的作业</li> <li>3. 思考: 为什么有的时候算出来的通解与答案对不上?</li> </ol> <p><b>五、板书设计</b></p> 	<p><math>y'' = f(y, y')</math> 型的微分方程求解方法.</p> <p><b>随堂练习:</b> 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误. 培养学生自主思考和辨析能力。</p> <p><b>课后思考:</b> 该问题的答案可以解决很多同学的疑惑, 算出来的结果与参考答案相差常数, 所以与答案对不上。</p>
--	--



## 教学反思

### 1. 成功之处

本节课对知识点的讲解极为清晰，梳理了知识点之间逻辑性、严密性。例如，知识衔接：回顾并强调一阶微分方程的基础知识和解法，帮助学生建立新旧知识之间的联系，理解降阶的必要性和可能性。

### 2. 存在问题

未关注到个别学生对知识理解的困难情况，导致学生感到些许挫败。

### 3. 改进措施

在今后，我将针对不同学生的学习能力和进度，提供个性化的学习建议和辅导，帮助学习困难的学生克服难关，鼓励优秀学生深入探索。

授课题目	§6.4 二阶线性微分方程	课时：2 学时
教学目标	<b>知识目标：</b> 1. 掌握二阶线性微分方程的基本形式。学生应熟悉二阶线性微分方程的标准形式，即 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 。 2. 理解二阶线性微分方程的解的结构。学生应理解二阶线性齐次微分方程解的结构，包括通解和特解的概念。	
	<b>能力目标：</b> 培养学生的分析和计算能力。学生应能够分析给定的二阶线性微分方程的类型（齐次或非齐次），并确定适当的解法。	
	<b>素养目标：</b> 培养学生的抽象和逻辑思维。学生将实际问题抽象为数学问题，再进行逻辑推理，分析方程的结构特点，选择合适的求解方法。	
重点难点	<b>教学重点：</b> $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 和 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的求解方法。 <b>教学难点：</b> $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的求解方法。	
方法手段	<b>教学方法：</b> 讲授法、案例分析法。 <b>教学手段：</b> 多媒体、学习通平台。	
教学设计		
教学过程		教学活动
<b>一、导入新课</b> 复习一阶微分方程、可降解微分方程的求解方法导入新课。 <b>二、讲解新知</b> <b>1. 线性微分方程解的性质与结构</b>		<b>复习方式：</b> 通过学习通随机抽取学生带领大家复习上节课的知识内容，提高学生对知识的掌握度。

形如  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的方程称为二阶线性非齐次微分方程. 其中  $p(x), q(x)$  及  $f(x)$  是已知函数,  $p(x), q(x)$  称为系数函数,  $f(x)$  称为自由项. 当  $f(x) = 0$  时, 方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  称为二阶线性齐次微分方程.

**定理 1 (齐次方程的解的叠加原理):** 如果  $y_1(x), y_2(x)$  是某二阶线性齐次微分方程的两个解, 则它们的线性组合  $y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  仍是该齐次微分方程的解. 其中  $C_1, C_2$  是任意常数.

证: 由假设得  $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ ,

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0,$$

再将  $y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  代入  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  左边, 得

$$\begin{aligned} & [C_1y_1'' + C_2y_2''] + p(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\ &= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = 0. \end{aligned}$$

故  $y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解.

从  $y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  的形式上看, 含有两个任意常数, 但它不一定是方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的通解.

例如, 设  $y_1$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解, 取  $y_2 = 3y_1$ , 则  $y_2$  也是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解, 但它们的线性组  $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = (C_1 + 3C_2)y_1(x) = Cy_1(x)$  ( $C = C_1 + 3C_2$ ),

不是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的通解. 那么, 在什么条件下,  $y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  才是方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的通解呢?

要解决此问题, 还需引入函数组线性相关与线性无关的概念.

**定义 1:** 设  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  为定义在区间  $I$  上的  $n$  个函数. 如果存在  $n$  个不全为零的常数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得当  $x \in I$  时, 等式  $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \dots + k_ny_n(x) = 0$  恒成立, 那么称这  $n$  个函数在区间  $I$  上**线性相关**; 否则称为**线性无关**.

例如, 函数组  $1, \cos^2 x, \sin^2 x$  在任何区间上是线性相关的. 因为取  $k_1 = 1, k_2 = k_3 = -1$ , 等式  $1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$  恒成立.

由定义可知, 在某区间内的两个函数  $y_1(x), y_2(x)$ , 如果存在不为零的常数  $k$ , 使得  $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$  成立, 则称  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  在该区间内线性无关; 否则, 称线性相关.

根据线性无关的概念, 得到下面的结论:

**定理 2 (齐次线性方程的通解结构):** 如果函数

问题引导学生思考, 引出后续知识点.

$y_1(x), y_2(x)$  是方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的两个线性无关的特解, 则  $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是它的通解.

定理 2 表明, 求二阶齐次线性方程的通解, 只需求得两个线性无关的特解即可.

**定理 3:** 若  $y_1(x), y_2(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的解, 则  $y_1(x) - y_2(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  解.

**定理 4 (非齐次线性方程的通解结构):** 如果函数  $y^*(x)$  是二阶非齐次微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的一个特解,  $Y(x)$  是对应齐次方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的通解, 则  $y = Y(x) + y^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的通解.

证:

将  $y = Y(x) + y^*(x)$  代入  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的左端, 则有  $(Y'' + y^{*''}) + p(x)(Y' + y^{*'}) + Q(x)(Y + y^*)$

$$= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y) \\ = f(x) + 0 = f(x).$$

故  $y = Y(x) + y^*(x)$  是非齐次方程的解. 由于齐次方程通解中含有两个相互独立的任意常数, 所以  $y = Y(x) + y^*(x)$  中也含有两个相互独立的任意常数, 即它是非齐次方程的通解.

**定理 5 (解的叠加原理):** 设函数  $y_1^*(x), y_2^*(x)$  分别是二阶非齐次线性方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$

$$\text{与 } y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  是微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

证:

将  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  代入  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$  的左端, 得  $[y_1^*(x) + y_2^*(x)]'' + p(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)]'$

$$+ q(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)] \\ = [y_1^{*''}(x) + p(x)y_1^{*'}(x) + q(x)y_1^*(x)] \\ + [y_2^{*''}(x) + p(x)y_2^{*'}(x) + q(x)y_2^*(x)] \\ = f_1(x) + f_2(x).$$

故  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  是该方程的特解.

## 2. 二阶线性常系数齐次微分方程

由解的结构定理可知, 求  $y'' + py' + qy = 0$  的通解可归结为求它的两个线性无关的特解, 由于  $y'', y', y$  各自乘上常数因子后相加为零, 即  $y$  和它的导数  $y'', y'$  之间只相差常数因子, 当  $\lambda$  为常数时, 指数函数  $y = e^{\lambda x}$  恰好具备这一性质, 因此我们用  $y = e^{\lambda x}$  来尝试, 看能否选取适当的常数  $\lambda$ , 使得

先回顾一阶非齐次线性微分方程的通解再引出定理 4: 一阶非齐次线性微分方程的通解等于对应的齐次线性方程通解与非齐次线性方程的一个特解之和. 实际上, 二阶及二阶以上的高阶线性非齐次微分方程的通解也具有这样的结构. 提醒学生: 需要常常温故知新, 养成良好的学习习惯.

**重点 1:** 二阶线性常系数齐次线性方程的通解.

$y = e^{\lambda x}$  满足  $y'' + py' + qy = 0$ .

设  $y = e^{\lambda x}$ , 求导后代入  $y'' + py' + qy = 0$  中, 有  $(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$  即有  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  称此式为方程  $y'' + py' + qy = 0$  的特征方程.

显然  $y = e^{\lambda x}$  是  $y'' + py' + qy = 0$  的特解的充分必要条件是  $\lambda$  为特征方程的根. 下面根据特征根的取值情况给出  $y'' + py' + qy = 0$  的通解.

设  $\Delta = p^2 - 4q$ ,  $C_1, C_2$  是独立的任意常数.

(1) 当  $\Delta > 0$  时, 特征方程有两个相异实根  $\lambda_1, \lambda_2$ , 这时方程有两个特解  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . 由于  $\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq k$  (常数), 所以  $y_1, y_2$  线性无关, 故方程的通解为  $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

(2) 当  $\Delta = 0$  时, 特征方程有二重根  $\lambda$ . 这时方程有一个特解  $y_1 = e^{\lambda x}$ , 设另一个特解为  $y_2$ , 因为  $\frac{y_2}{y_1} \neq k$  (常数),

故设  $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$ , 即  $y_2 = u(x)y_1 = u(x)e^{\lambda x}$ . 求  $y_2', y_2''$  并将

$y_2, y_2', y_2''$  代入  $y'' + py' + qy = 0$  中得,

$$u''(x) + (2\lambda + p)u'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)u(x) = 0$$

由于  $\lambda$  是特征方程的二重根, 因此,

$$\begin{cases} 2\lambda + p = 0 \\ \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \end{cases},$$

于是有  $u''(x) = 0$ , 因为这里只要得到一个不为常数的解, 所以就取  $u(x) = x$ , 由此得  $y_2 = xe^{\lambda x}$ , 故方程的通解为

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

(3) 当  $\Delta < 0$  时, 特征方程有两个共轭复根:  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ,  $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ ,  $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$  是微分方程  $y'' + py' + qy = 0$  的两个特解, 但它们是复数形式, 为了得到实值函数形式的解, 利用欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  把  $y_1, y_2$  改写成

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 有

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

也是方程  $y'' + py' + qy = 0$  的解, 且  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \cot \beta x \neq \text{常数}$ , 故

组织讨论: 如何找到两个线性无关的解?

方程的通解为  $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$  .

综上所述, 求齐次微分方程  $y'' + py' + qy = 0$  的通解的步骤是:

- (1) 写出特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ;
- (2) 求出两个特征根  $\lambda_1, \lambda_2$ ;
- (3) 根据两个特征根的不同情形, 写出通解.

#### 二阶线性常系数齐次微分方程通解形式表

微分方程	特征方程	特征根	微分方程通解
$y'' + py' + qy = 0$ 其中 $p, q$ 为常数	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$	不等实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
		相等实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$
		一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 1 求下列方程的通解:

- (1)  $y'' - y' - 6y = 0$ ; (2)  $y'' + 2y' + y = 0$ ; (3)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

解:

- (1) 特征方程为  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ ,

故所求的通解为  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ .

- (2) 特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ,

故所求的通解为  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ .

- (3) 特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ , 特征根为  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ ,

故所求的通解为  $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ .

随堂练习 1 求微分方程  $y'' - 4y' + 3y = 0$  满足初始条件  $y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$  的特解

解: 特征方程  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$  的根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , 故方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ , 又  $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ , 代入初始条件  $y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$ , 得  $C_1 = 4, C_2 = 2$ , 故所求特解为  $y = 4e^x + 2e^{3x}$ .

### 3. 二阶线性常系数非齐次微分方程

二阶线性常系数非齐次微分方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的通解等于它的一个特解加上对应齐次微分方程的通解. 而对应齐次微分方程的通解的求法已经在上一节的内容中介绍了. 下面将介绍微分方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的特解  $y^*$  的求法, 我们主要介绍两种  $f(x)$  为特殊形式时  $y^*$  的求法.

#### (1) $f(x) = e^{rx} P_m(x)$

这里  $r$  为常数,  $P_m(x)$  是关于  $x$  的一个  $m$  次多项式, 先看特解  $y^*$  的形式.

分析: 多项式  $P_m(x)$  与指数函数  $e^{rx}$  乘积的导数应该也

讲完齐次通解的三种情况后, 留下一点时间让学生记住三个结论即可. 为了便于记忆, 将上述三种情况汇总成表的形式.

随堂练习 1: 利用学习通平台发布习题, 学生作答后上传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误. 培养学生自主思考和辨析能力.

重点 2 (也是难点): 二阶线性常系数非齐次微分方程. 也是整个课程的难点内容.

是一个多项式与指数函数的乘积，因此设方程的特解为  $y^* = Q(x)e^{rx}$ ，其中  $Q(x)$  是某个多项式函数。

$$\text{将 } y^* = [rQ(x) + Q'(x)]e^{rx}$$

$$y^{*'} = [r^2Q(x) + 2rQ'(x) + Q''(x)]e^{rx}$$

分别代入方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  并消去  $e^{rx}$ ，得

$$Q''(x) + (2r + p)Q'(x) + (r^2 + pr + q)Q(x) = P_m(x) \quad (1)$$

分以下三种不同的情形，分别讨论特解  $y^*$  的形式：

1) 若  $r$  不是特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  的根，即  $r^2 + pr + q \neq 0$ ，要使 (1) 的两端恒等， $Q(x)$  也应为一个  $m$  次多项式，设为  $Q_m(x)$ ，从而得到所求方程的特解形式为

$$y^* = Q_m(x)e^{rx}.$$

2) 若  $r$  是特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  的单根，即  $r^2 + pr + q = 0, 2r + p \neq 0$ ，要使 (1) 的两端恒等， $Q'(x)$  应为一个  $m$  次多项式，于是特解形式可写为

$$y^* = xQ_m(x)e^{rx}.$$

3) 若  $r$  是特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  的重根，即  $r^2 + pr + q = 0, 2r + p = 0$ ，要使 (1) 的两端恒等， $Q''(x)$  应为一个  $m$  次多项式，于是特解形式可写为

$$y^* = x^2Q_m(x)e^{rx}.$$

综上，当  $f(x) = e^{rx}P_m(x)$  时，**可设特解形式为**

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x),$$

其中，

$$k = \begin{cases} 0, \lambda \text{ 不是根;} \\ 1, \lambda \text{ 是单根;} \\ 2, \lambda \text{ 是重根.} \end{cases}$$

特解形式确定后，我们应如何求特解  $y^*$  呢？

首先根据特解应有的形式设出特解，再将设出的特解代入原方程，用待定系数法求出特解的具体表达式即可。

**例 2** 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$  的一个特解。

**解：**  $f(x)$  是  $P_m(x)e^{rx}$  型，其中  $P_m(x) = 3x + 1, r = 0$ 。

设特解形式为  $y^* = x^k(ax + b)$ ，对应的齐次方程的特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ， $r = 0$  不是特征方程的根，则  $k = 0$ ，特解  $y^* = ax + b$ ，代入原方程，得

$$-3ax - 2a - 3b = 3x + 1,$$

比较两端  $x$  同次幂的系数，得  $\begin{cases} -3a = 3 \\ -2a - 3b = 1 \end{cases}$ ，

解得  $a = -1, b = \frac{1}{3}$ ，于是求得一个特解为  $y^* = -x + \frac{1}{3}$ 。

**随堂练习 2** 求方程  $y'' - 3y' + 2y = 3xe^x$  的通解。

**解：** 对应齐次方程的特征方程为  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ，

**随堂练习 2：** 利用学习通平台发布习题，学生作答后上

<p>解得特征根为 <math>\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2</math>,</p> <p>故对应的齐次方程的通解为 <math>Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}</math>.</p> <p>因为 <math>f(x) = 3xe^x</math>, 可设特解形式为 <math>y^* = x^k(ax+b)e^x</math>,</p> <p>又 <math>r=1</math> 是特征方程的单根, 所以 <math>k=1</math>, 特解形式为</p> $y^* = x(ax+b)e^x$ <p>代入原方程并化简, 得 <math>-2ax + (2a-b) = 3x</math>,</p> <p>比较系数, 得 <math>a = -\frac{3}{2}, b = -3</math>, 故原方程的特解为</p> $y^* = -\frac{3}{2}x(x+2)e^x.$ <p>从而原方程的通解为</p> $y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x(x+2)e^x.$ <p>(2) <math>f(x) = e^{rx}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]</math></p> <p><math>P_l(x), P_n(x)</math> 分别为 <math>l, n</math> 次多项式, <math>r, \omega</math> 是常数. 应用欧拉公式, 把 <math>f(x)</math> 表示成复变指数函数的形式, 有</p> $\begin{aligned} f(x) &= e^{rx}[p_l(x)\cos \omega x + p_n(x)\sin \omega x] \\ &= e^{rx}\left[p_l \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + p_n \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right] \\ &= \left(\frac{p_l}{2} + \frac{p_n}{2i}\right)e^{(r+i\omega)x} + \left(\frac{p_l}{2} - \frac{p_n}{2i}\right)e^{(r-i\omega)x} \end{aligned}$ <p>设 <math>m = \max\{l, n\}</math>, 则</p> $p_m = \left(\frac{p_l}{2} + \frac{p_n}{2i}\right) = \frac{p_l}{2} - \frac{p_n}{2}i \text{ 与}$ $\bar{p}_m(x) = \left(\frac{p_l}{2} - \frac{p_n}{2i}\right) = \frac{p_l}{2} + \frac{p_n}{2}i$ <p>是互成共轭的 <math>m</math> 次多项式. 于是有,</p> $f(x) = p_m(x)e^{(r+i\omega)x} + \bar{p}_m(x)e^{(r-i\omega)x}$ <p>只要分别求出方程</p> $y'' + py' + qy = p_m(x)e^{(r+i\omega)x}$ <p>与</p> $y'' + py' + qy = \bar{p}_m(x)e^{(r-i\omega)x}$ <p>的一个特解 <math>y_1^*</math> 与 <math>y_2^*</math>, 由叠加原理可知 <math>y_1^* + y_2^*</math> 就是方程 <math>y'' + py' + qy = f(x)</math> 的一个特解.</p> <p>对 <math>y'' + py' + qy = p_m(x)e^{(r+i\omega)x}</math>, 根据第一种类型的结果, 可设 <math>y_1^* = x^k Q_m e^{(r+i\omega)x}</math>, 其中, <math>k</math> 按 <math>r+i\omega</math> 不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1.</p> <p><math>\bar{p}_m(x)e^{(r-i\omega)x}</math> 与 <math>p_m(x)e^{(r+i\omega)x}</math> 共轭, 所以与 <math>y_1^*</math> 成共轭的函数 <math>y_2^* = x^k \bar{Q}_m e^{(r-i\omega)x}</math> 必为 <math>y'' + py' + qy = \bar{p}_m(x)e^{(r-i\omega)x}</math> 的特解, 这里 <math>Q_m</math> 与 <math>\bar{Q}_m</math> 成共轭的 <math>m</math> 次多项式. 因此方程 <math>y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)</math> 的一个特解为</p>	<p>传答案及时批改, 并对存在典型错误的学生指出问题, 同时警示其他同学避免出现相同错误. 培养学生自主思考和辨析能力.</p>
---	---



$$y^* = y_1^* + y_2^* = x^k e^{rx} [Q_m e^{i\omega x} + \bar{Q}_m e^{-i\omega x}].$$

因为括号中两项共轭，相加后无虚部，所以可写成实函数

$$y^*(x) = x^k e^{rx} (R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x).$$

综上所述，**得出如下结论**：

如果  $f(x) = e^{rx} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$ ，则二阶线性常系数非齐次微分方程具有特解形式为

$$y^*(x) = x^k e^{rx} (R_m(x) \cos \omega x + S_m(x) \sin \omega x).$$

其中  $R_m(x)$ 、 $S_m(x)$  都是  $m$  次多项式，但是系数不一定相同。 $m = \max\{l, n\}$ ，当  $r + i\omega$  (或  $r - i\omega$ ) 不是特征方程的根时，取  $k = 0$ ；当  $r + i\omega$  (或  $r - i\omega$ ) 是特征方程的单根时，取  $k = 1$ 。

**例 3** 求微分方程  $y'' + y = x \cos 2x$  的一个特解。

**解：**  $f(x)$  属于  $e^{rx} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$  型。

设特解形式为  $y^* = x^k [(ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x]$ 。

这里的  $r = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, P_n(x) = 0$ 。

对应的齐次方程  $y'' + y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0$ ，

特征根为  $\lambda = \pm i$ ，由于  $r \pm i\omega = \pm 2i$  不是特征方程的根，所以取  $k = 0$ ，特解

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x.$$

把它代入所给方程，得

$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x,$$

比较系数，得

$$\begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x \\ -3cx - 3d - 4a = 0 \end{cases},$$

即有

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d - 4a = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9},$$

$$\text{即特解为 } y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

### 三、课程小结

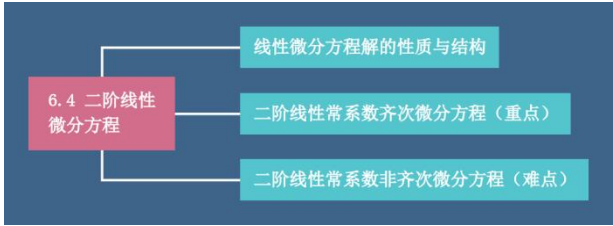
1.  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的求解方法
2.  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的求解方法

$$f(x) = e^{rx} P_m(x) \text{ 或 } f(x) = e^{rx} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$$

### 四、布置作业

1. 教材的课后习题
2. 学习通上对应的作业

**强调：**记住讨论得到的结论以方便做题。

<p>3. 思考：二阶微分方程在物理学中的应用？</p> <p>五、板书设计</p> 	<p>课后思考：培养学生自主思考和学习的能力，自主探索与专业相关的知识。同时也是培养学生需要具有应用意识。</p>
<p>教学反思</p>	
<p><b>1. 成功之处</b></p> <p>本节课，我利用了比较长的课时讲解理论与证明，旨在为学生理清楚结论的来龙去脉，让学生清楚地认识到记住结论的必要性。</p> <p><b>2. 存在问题</b></p> <p>由于本节知识点比较难于理解，在讲解理论时耗用了较长的课时，使得学生的练习量变少，对知识掌握得不牢。</p> <p><b>3. 改进措施</b></p> <p>我将适当压缩理论的讲解，增加相关的习题练习和讲解，确保学生懂知识并会用知识。另外我将注重学生的及时反馈，及时调整教学策略为后续的教学做好准备。</p>	