

# 《高等代数 2》课程教学大纲

## (Advance Algebra)

### 一、课程概况

课程名称：高等代数 2

课程代码：07100240

课程性质：专业必修课 【核心课】

课程学分：6 学分

预修课程：高等代数 1，解析几何

开课学期：第 2 学期

课程学时：90 学时（理论总学时/实践总学时：75/15）

课程周学时：6 学时（理论学时/实践学时：5/1）

考核方式：闭卷笔试、平时考核相结合

课程负责人：李巍

### 二、课程目标

**课程目标 1：**系统掌握二次型、线性空间、线性变换和欧式空间的基本概念、思想和方法，能够运用相关理论解决本学科的具体或抽象问题，锻炼良好的逻辑推理能力、抽象思维能力以及严谨的数学表达能力。

**课程目标 2：**通过探究线性空间的结构，线性变换的表示及应用，欧氏空间的内积的作用培养学生的代数思维和视角，构建起独立思考、主动探究、批判性思维以及建模能力和创新能力。

**课程目标 3：**通过分组讨论汇报，增强学生团队协作活动的体验，培养其良好的团队协作精神和沟通表达能力。

### 三、课程目标与毕业要求的关系

#### 1.课程目标与毕业要求的对应关系

毕业要求	毕业要求分解指标点	课程目标
学科素养	3-1 系统掌握数学学科的基本知识、基本原理和基本技能，具有良好的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象等数学学科专业能力；	课程目标 1

学会反思	7-2 初步掌握反思的方法与技能和教育科学研究的常用方法，能够应用英语阅读相关材料，跟踪国内外数学教育发展趋势。能够对数学基础教育实践问题进行全方面的思考与研究，基于质疑、求证、判断发展批判性思维；	课程目标 2
沟通合作	8-1 理解专业学习共同体的特点和价值，了解学习共同体在教学过程中的重要作用；掌握团队协作的相关知识技能，具有团队协作活动的体验，具备良好的团队协作精神。	课程目标 3

## 2.课程目标与毕业要求的矩阵关系图

课程目标	学科素养	学会反思	沟通合作
	3-1	7-2	8-1
课程目标 1	H		
课程目标 2		M	
课程目标 3			M

(注：H 代表课程分目标与毕业要求分指标点为高支撑，M 代表中支撑，L 代表低支撑。)

## 四、课程教学内容与课程目标的对应关系

章次	内容	支撑课程目标
第五章	二次型	课程目标 1
第六章	线性空间	课程目标 1、2、3
第七章	线性变换	课程目标 1、2、3
第九章	欧氏空间	课程目标 1、2

## 五、教学方式

### (一) 课堂讲授

通过二次型及其标准型，规范型和正定二次型的学习，掌握代数学中二次型及二次曲线的分类方法及其性质；通过线性空间的学习，掌握维数、基底、坐标的作用及实际意义，理解它们是中学数学和实际问题中相关概念的概括、抽象和提升，从而建立起实际与理论，具体与抽象之间的联系。通过子空间及其相关运算的学习，从代数学的角度理解部分和整体之间的关系。通过对线性变换的矩阵理解将实际问题数量化的方法，通过线性变换特征值、特征向量和不变子空间的探究理解研究线性变换问题的代数方法。通过对欧式空间的学习，理解了解析几何中二、三维空间向量的长度、夹角、正交等问题的代数本质---内积，提升学生的抽象思维和逻辑推理能力。

## (二) 课堂讨论

对本课程中的重要内容，布置课外学习任务，通过查阅文献，了解相应的知识和处理问题的方法，并在课堂中交流讨论，一般进行 2 次左右。

## (三) 课后作业

布置课后习题作业，以巩固课堂学习内容，全部批改并对反馈的问题进行讲评或让学生对作业进行思路讲解、讨论。布置课后自主学习作业，对已学习的内容梳理总结、反思，理解抽象代数与中学数学的内涵联系。

## 六、教学内容及学时分配

### (一) 教学内容与学时分配

各章教学内容与学时分配表

章次	内容	总课时	理论课时	实践课时
五	二次型	16	13	3
六	线性空间	26	22	4
七	线性变换	26	22	4
九	欧式空间	22	18	4

### (二) 教学大纲

#### 第五章 二次型 (16 学时)

##### 1. 教学目的与要求

掌握二次型及其矩阵、线性替换、线性替换的退化、非退化，矩阵合同的概念。

掌握二次型标准形的概念。熟练的运用配方法和合同变换法化二次型为标准形。

深刻理解规范形的概念；掌握正、负惯性指数，符号差的概念；掌握将复二次型和实二次型化成规范形的方法。掌握正定、半正定、负定、半负定和不定二次型的概念；熟练掌握正定二次型和正定矩阵的判定法。

##### 2. 主要内容

###### (1) 第一节 二次型及其矩阵表示 (2 学时)

教学重点：二次型及二次型矩阵表示。

教学难点：非退化线性替换前后二次型矩阵的关系。

###### (2) 第二节 标准型 (3 学时)

教学重点：二次型的标准形、求标准形的方法。

教学难点：化二次型为标准形

(3) 第三节 唯一性 (3 学时)

教学重点：二次型的秩、复二次型的规范形、实二次型的规范形。

教学难点：复数域与实数域上化二次型为规范形及其规范形的唯一性。

(4) 第四节 正定二次型 (5 学时)

教学重点：正定二次型的性质、正定二次型和正定矩阵的判别、二次型的分类。

教学难点：正定二次型和正定矩阵的判别。

### 3. 主要实践内容 (3 学时)

(1) 第三节 化复(实)二次型为标准型和规范型(练习) (2 学时)

(2) 习题课 二次曲线的分类(练习) (1 学时)

## 第六章 线性空间 (26 学时)

### 1. 教学目的与要求

掌握集合、映射、1-1 对应及相关的概念。掌握集合运算、映射运算的符号和性质。

深刻理解线性空间的定义，熟记线性空间的简单性质。深刻理解线性空间中向量的线性组合、线性表示、向量组的等价，线性相关、线性无关、维数、基与坐标的概念；掌握向量组构成基的条件，会求向量在给定基下的坐标，会求线性空间的基和维数。掌握基变换与坐标变换的概念；熟练掌握基变换与坐标变换的运算。熟悉子空间、生成子空间的概念。深刻理解子空间及其生成向量组之间的关系；子空间的基与整个空间的基的关系；掌握子空间的交与和的概念；掌握维数定理。掌握直和的概念，深刻理解直和的充要条件。深刻理解同构的概念，并掌握线性空间同构的充要条件。

### 2. 主要内容

(1) 第一节 集合、映射 (2 学时)

教学重点：集合、映射的概念。

教学难点：映射性质的判定。

(2) 第二节 线性空间的定义与简单性质 (2 学时)

教学重点：线性空间的概念、性质。

教学难点：线性空间的定义及判别。

(3) 第三节 维数、基与坐标 (3 学时)

教学重点：维数、基与坐标的概念。

教学难点：线性空间基底和维数的求法、向量在给定基下的坐标求法。

(4) 第四节 基变换与坐标变换 (2 学时)

教学重点：基变换与坐标变换的公式。

教学难点：过渡矩阵的定义和求法。

(5) 第五节 线性子空间 (4 学时)

教学重点：线性子空间的概念、子空间与线性空间的关系、生成子空间。

教学难点：线性子空间的判定。

(6) 第六节 子空间的交与和 (4 学时)

教学重点：子空间的交与和的概念与求法、维数定理。

教学难点：子空间的交与和的求法与证明。

(7) 第七节 子空间的直和 (3 学时)

教学重点：子空间的直和的概念和等价条件。

教学难点：子空间的直和的证明。

(8) 第八节 线性空间的同构 (2 学时)

教学重点：线性空间同构的概念。

教学难点：线性空间同构的证明。

### 3. 主要实践内容 (4 学时)

(1) 第三、四节 基底、坐标、基坐标和基变换 (练习) (2 学时)

(2) 第五六七节 子空间、子空间的和与直和 (练习) (2 学时)

## 第七章 线性变换 (26 学时)

### 1. 教学目的与要求

掌握线性变换的概念。熟练掌握线性变换的运算及其性质。熟练掌握线性变换与其矩阵的关系、线性变换及其运算的矩阵表示，会求线性变换在给定基下的矩阵；熟练掌握同一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系。熟练掌握特征多项式、特征值、特征向量的概念以及特征值、特征向量的求法。熟练掌握相似矩阵特征多项式的关系；一般了解哈密尔顿-凯莱定理的条件和结论。深刻理解特征向量的性质和线性变换在某组基下矩阵为对角矩阵的充分条件及充要条件。掌握线性变换的值域与核的概念，以及它们维数间的关系。掌握不变子空间的概念，深刻理解线性空间分解成不变子空间直和的充要条件。

## 2. 主要内容

### (1) 第一节 线性变换的定义 (2 学时)

教学重点: 线性变换的概念。

教学难点: 线性变换的判定及证明。

### (2) 第二节 线性变换的运算 (2 学时)

教学重点: 线性变换的运算。

教学难点: 线性变换的运算的定义。

### (3) 第三节 线性变换的矩阵 (4 学时)

教学重点: 线性变换与其矩阵的关系、线性变换的运算的矩阵表示。

教学难点: 线性变换在给定基下的矩阵的求法、同一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系。

### (4) 第四节 特征值与特征向量 (4 学时)

教学重点: 线性变换与矩阵的特征值与特征向量的概念及求法。

教学难点: 相似矩阵特征多项式的关系。

### (5) 第五节 对角矩阵 (4 学时)

教学重点: 线性变换在某组基下矩阵为对角矩阵的充分条件及充要条件。

教学难点: 线性变换与矩阵可对角化的判定。

### (6) 第六节 线性变换的值域与核 (4 学时)

教学重点: 线性变换的值域与核的概念与求法。

教学难点: 线性变换的值域与核的求法与证明。

### (7) 第七节 不变子空间 (2 学时)

教学重点: 不变子空间的定义及证明方法。

教学难点: 线性空间分解成不变子空间直和的充要条件。

## 3. 主要实践内容 (4 学时)

### (1) 第三四五节 线性变换的矩阵、特征值、特征向量和对角矩阵 (练习) (2 学时)

### (2) 第六七节 线性变换的值域与核、不变子空间 (练习) (2 学时)

## 第九章 欧几里得空间 (22 学时)

### 1. 教学目的与要求

掌握欧氏空间, 向量的长度, 夹角, 垂直, 线性变换的度量矩阵的概念和度量矩阵

的性质。掌握标准正交基、正交矩阵的概念；深刻理解标准正交基的性质；熟练掌握施密特正交化方法。深刻理解欧氏空间同构的概念和意义；熟练掌握同构的充要条件。掌握正交变换、第一类、第二类正交变换的概念。熟练掌握正交变换的等价命题。掌握正交子空间、正交补的概念。熟练掌握正交子空间的性质。深刻理解实对称矩阵与正交矩阵的关系。能熟练用正交线性替换将一个实二次型化为标准形。

## 2. 主要内容

### (1) 第一节 定义与基本性质 (2 学时)

教学重点：欧氏空间的概念。

教学难点：欧氏空间的判定及证明。

### (2) 第二节 标准正交基 (4 学时)

教学重点：标准正交基的概念与计算。

教学难点：施密特正交化方法。

### (3) 第三节 同构 (1 学时)

教学重点：同构的概念。

教学难点：同构的证明。

### (4) 第四节 正交变换 (4 学时)

教学重点：正交变换的概念及等价命题。

教学难点：正交变换及正交矩阵的判定。

### (5) 第五节 子空间 (4 学时)

教学重点：正交子空间的概念及性质。

教学难点：正交子空间的证明。

### (6) 第六节 实对称矩阵的标准型 (3 学时)

教学重点：实对称矩阵与正交矩阵的关系、用正交线性替换将实二次型化为标准形的方法。

教学难点：实对称矩阵可对角化的证明及正交线性替换化实对称阵为对角阵的方法。

## 3. 主要实践内容 (4 学时)

### (1) 第一二节 欧氏空间的判别、标准正交基 (练习) (2 学时)

### (2) 第四节 正交变换及其实际应用 (练习) (1 学时)

### (3) 第六节 实对称阵的标准型及实二次型的标准型 (1 学时)

## 七、考核内容及方式

课程目标	考核内容	评价方式
课程目标 1	二次型的标准型和规范型、正定二次型；线性空间的定义、子空间的交与和、子空间的直和、线性空间的同构、线性变换的矩阵、特征值和特征向量、值域与核、不变子空间；欧氏空间的定义、性质、正交变换、子空间及其直交补、实对称阵的标准型。	1. 课堂提问 2. 作业 1：课后习题 3. 阶段性测验 4. 期末考试
课程目标 2	探究线性空间的结构，线性变换的表示及应用，欧氏空间的内积的作用。总结各章的知识点的内部联系及矩阵和方程组求解的联系。	作业 2：小论文 作业 3：知识结构图表
课程目标 3	空间概念的发展，具体与抽象、低维线性空间与抽象线性空间、内积的意义。	作业 4：分组讨论，交流汇报

## 八、成绩评定方法

### 1.总评成绩计算方法

总评成绩=课堂参与（占总成绩的 5%）+阶段测验（占总成绩的 3%）+作业成绩（占总成绩的 12%）+期末笔试试卷成绩（占总成绩的 80%）

注：（1）课堂参与：课堂提问及出勤分别占总成绩的 3%和 2%；

（2）作业成绩：本学期 4 项作业，每项占总成绩的 3%，共占总成绩的 12%。

### 2.课程分目标达成评价方法

课程目标	考核项目				课程分目标达成评价方法
	1 期末考试	2 阶段测验	3 课堂参与	4 作业	
课程目标 1	50%	30%	10%	10%	分目标达成度= $a_{i1}$ *（分目标笔试试题平均分/分目标笔试试题总分）+ $a_{i2}$ *（分目标阶段测验成绩平均分/分目标阶段测验成绩总分）+ $a_{i3}$ *（分目标课堂参与成绩平均分/分目标课堂参与成绩总分）+ $a_{i4}$ *（分目标作业成绩平均分/分目标作业成绩总分） 其中 $a_{ij}$ 各考核项目在分目标中占比系数， $a_{ij}$ 代表考核项目 $j$ 在课程目标 $i$
课程目标 2				100%	
课程目标 3				100%	



					达成的占比。
--	--	--	--	--	--------

### 3.课程目标达成评价方法

课程目标达成度=0.7\*课程目标 1 达成度+0.15\*课程目标 2 达成度+0.15\*课程目标 3 达成度

### 九、推荐教材及参考书：

- [1] 《高等代数》北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编，高等教育出版社。2003 年（第四版）。
- [2] 《高等代数习题解》，杨子胥，山东科学技术出版社，2001。
- [3] 《高等代数》，胡适耕 刘先忠，科学出版社， 2007。
- [4] 《高等代数解题方法》，许甫华 张贤科，清华大学出版社，2005。
- [5] 《高等代数》，张禾瑞 郝炳新，高等教育出版社，2007 年（第五版。）

撰写人：李巍

审定人：黄影

学院主管领导：孟宪吉

学院盖章：

2019 年 7 月 20 日