高等代数 2 线上线下混合式教学教案

课程名称：高等代数 2

课程代码：**07100240**

课程性质：专业必修课 【核心课】

课程学分：**6** 学分

数学与系统科学学院

黄 影

	§5.1　二次型及其矩阵表示	**教学时数**	2 学时
线上预习目标	1.了解二次型的历史 2.了解二次型的定义 3.了解二次型的矩阵定义		
教学目标	1.掌握二次型及二次型矩阵表示； 2.熟练掌握替换前后二次型矩阵的关系； 3.提高学生解决问题的能力。		
思政目标	1.　理解二次型与矩阵是“**抽象与具体**”的关系的哲学思想 2.　通过概念类比理解**事物普遍联系**的哲学原理 3.　体验数学的”**对称美**” 4.　二次型的**数学史**介绍激励学生**勇于探索**		
教学重点	二次型及二次型矩阵表示。		
教学难点	替换前后二次型矩阵的关系。		
教学方法	线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时） 线上（0.8 学时）： （1）　预习学银在线视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（1.4 学时）：讨论式（师生讨论）引导式、示范启发式	**教学手段**	线上线下混合式教学 （线上学银在线预习微课+ 线上自制知识点总结微课+ 线上自制习题讲解微课+ 线下多媒体教学）

教学过程		设计意图
线 上 教 学 过 程	**教师：（线上教学准备）** 1.通过在开学前建立学生微信群，将所有学生加入学习通，以方便本学期第一次课开展线上教学。 2.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课（24 分左右）， 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题(12 分左右) **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计“了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验“的”成绩统计“，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果。 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。

线 下 导 入 新 课	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1. 二次型的定义 2. 二次型的矩阵定义 在解析几何中，中心与坐标原点重合的有心二次曲线 $$f=ax^2+2bxy+cy^2\quad,\qquad(1)$$ 选择适当角度 θ，逆时针旋转坐标轴 $$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\cos\theta+y'\sin\theta\end{cases}$$ 得到标准方程 $$f'=a'x'^2+c'y'^2\quad。$$ 形如（1）的二次齐次多项式，不但在解析集合中出现，而且在数学的其他分支以及物理、力学中也常常出现。	通过提问检查学生预习效果 联系解析几何的知识，引出新知，引起学生对二次型的学习兴趣。
线 下 讲 授 新 课	**一、 二次型的定义** 设 P 是一个数域，一个系数在数域 P 中的关于文字 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式： $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}$$ （1） 称为数域 P 上的一个 n 元二次型，简称二次型，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 简记为 f。 **注：** 如果 $P=\mathbf{C}$，就称式（1）为复二次型，若 $P=\mathbf{R}$，就称式（1）为实二次型。 **二、 二次型的矩阵表示** 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为对称矩阵，那么二次型式(1)可以唯一地表示成： $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f\left(\boldsymbol{X}\right)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$	此定义可以由具体的齐次二次多项式引出，并引导学生根据实例归纳出定义。

线下讲授新课

称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型式（1）的矩阵， 即二次型式（1）的矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型式（1）的秩。

用矩阵的秩定义二次型的秩体现”**事物普遍联系**”的哲学思想

注：① 二次型式（1）的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上第 $k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 个元素恰为二次型式（1）中 x_k^2 的系数，而 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素和第 j 行第 i 列元素 $\left(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j\right)$ 都等于二次型式（1）中 x_ix_j 系数的二分之一，因此二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，这也给出了求二次型矩阵的方法；

二次型的矩阵体现数学的”**对称美**”

② 若 $\boldsymbol{B}$ 是 n 级对称矩阵，使得二次型式（1）$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$；

③ 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，如果 $c_{kk}=a_{kk}$ $\left(k=1,2,\cdots,n\right)$，$c_{ij}+c_{ji}=2a_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j\right)$，那么一定有：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

二次型与矩阵的关系体现”**抽象与具体**”的哲学思想

这说明将二次型式（1）写成矩阵乘积的形式写法是不唯一的，但要注意矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可能不是对称矩阵， 如果 $\boldsymbol{C}$ 不是对称矩阵， 那么 $\boldsymbol{C}$ 就不是二次型式（1）的矩阵。

例： $f(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2+4x_2^2-5x_3^2-7x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3$

令 $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,x_3\right)'$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

那么有：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 不是对称矩阵，所以只有 $\boldsymbol{A}$ 是 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的

此例强调二次型的矩阵必须是对

矩阵，而 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的第 1、2、3 个元素分别是 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1^2、x_2^2、x_3^2 的系数， $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 2 列元素与第 2 行第 1 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1x_2 系数的二分之一， $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 3 列元素与第 3 行第 1 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1x_3 系数的二分之一， $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行第 3 列元素与第 3 行第 2 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_2x_3 系数的二分之一，利用这一点就可求出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵。

称矩阵，当所给矩阵不是对称矩阵时，如何化成对称矩阵。

三、线性替换

设 $x_1,\cdots,x_n$； $y_1,\cdots,y_n$ 是两组文字，系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_{22} + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_{22} + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_{22} + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad （2）$$

称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个线性替换，或简称线性替换。如果线性替换式（2）的系数行列式：

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性替换式（2）就称为非退化的。

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)',\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)',\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，则线性替换式（2）就可写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$$

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 是非退化线性替换，那么二次型式（1）可写成：

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X'AX}=\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{C'AC})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y'BY}=g(\boldsymbol{Y})$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C'AC}$，这就是说非退化线性替换将二次型变成二次型，且如果 $\boldsymbol{A}$ 是二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X'AX}$ 的矩阵，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C'AC}$ 就是二次型 $g(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y'BY}$ 的矩阵。

强调非退化线性替换是用非退化矩阵定义的。

注：线性替换式（2）也称为数域 P 上的线性替换。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>四、 矩阵合同

1. 矩阵合同的定义

数域 P 上 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 称为合同的，如果有数域 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得
$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ，此时也称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在数域 P 上合同。

2. 矩阵合同的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵。合同是矩阵之间的一种关系，它具有自反性、对称性、传递性，即：
性质 1： $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同；
性质 2：如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，那么 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同；
性质 3：如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同。
注：① 矩阵合同与数域有关；
② 经非退化线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。</td>
<td>注意矩阵合同是一种等价关系。</td>
</tr>
<tr>
<td>新
知
扩
展</td>
<td>二次型等价

（1）数域 P 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\right)$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}\right)$，如果存在一个非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ （$\boldsymbol{C}$ 是数域 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵），把 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 变成 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ ，那么称二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 等价，记作 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\cong\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 。
（2）数域 P 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\right)$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}\right)$ 等价当且仅当它们的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在数域 P 上合同。
（3）数域 P 上任一 n 元二次型都等价于一个只含平方项的二次型。</td>
<td>思政：用联系的观点看问题</td>
</tr>
</table>

小 结	本节主要学习了二次型的定义、二次型矩阵的性质以及合同矩阵的定义和性质，涉及的题型为 （1）已知二次型，求其矩阵。 （2）利用矩阵合同的性质证明相关问题。	
思考与练习	$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2=\sum_{i=1}^{s}\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\right)^2$。 证明：$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$的秩等于矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{sn}$的秩。 **证明**：令$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \qquad\vdots\\ y_s=a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n\end{cases}$，那么有：$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$， 于是： $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{s}y_i^2=\left(y_1,y_2,\cdots,y_s\right)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 因为$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$是实对称阵，所以$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$为$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$的矩阵，且$r\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=r\left(\boldsymbol{A}\right)$，于是：$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$的秩$=r\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=r\left(\boldsymbol{A}\right)$。	此题加深学生对二次型的秩与矩阵的秩的关系的理解。
作 业	P233 1 (I) 1)　2)（要求只写出二次型的矩阵）	巩固所学
阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	多角度学习触类旁通
教学反思	1.线上视频课的预习加深了学生的对知识的理解，从学生课上的反馈看，混合式教学效果明显好于传统教学。 2.通过提问发现，仍有学生预习效果不明显，态度不够认真。 需加强引导和督促。 3.学习通讨论区学生积极提问和答复，极大拓展了线下教学的时空，形成了较为浓厚的线上学习氛围。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§5.2　标准型</td><td>教学时数</td><td>3 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1. 了解化二次型为标准型的方法
2. 学会配方法
3. 了解合同变换法</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">1. 掌握二次型化成标准形的相关理论以及相应的矩阵语言的叙述；
2. 熟练掌握化二次型为标准形的方法（配方法与合同变换法）。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">1.　理解化二次型为标准型的不变量蕴含”形变质不变”的哲学思想
2.　理解合同变换法的”对称美”</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">二次型的标准形、求标准形的方法。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">化二次型为标准形。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（1.2 学时+1.8 学时）
线上（1.2 学时）：
（1）预习学银在线视频课
（2）随堂练习或预习练习
（3）课后学习学习通微课（自制）：“化二次型为标准型的方法总结”
线下（1.8 学时）：
讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+线上自制知识点总结微课+线上自制习题讲解微课+线下多媒体教学）</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td>线上教学过程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
问题 1：化二次型为标准型的方法有哪些？
问题 2：配方法的本质是什么？
问题 3：合同变换法与一般的线性变换有何区别？

2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。
3.录制“二次型为标准型的方法总结微课”，上传学习通。</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果</td></tr>
</table>

	学生：（线上学习内容） 4.学生学习通预习学银在线本节课的视频课（24 分左右），并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 5. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题(12 分左右) 6. 课后学习学习通自制微课“二次型为标准型的方法总结微课”。 **教师：（线上教学总结）** 7. 通过学习通后台的“统计“了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 8. 借助“学习通随堂测验“的”成绩统计“，了解学生知识点掌握情况。	3.6. 总结方法，便于学生复习总结。 4、5. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 7、8. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下教学过程导课	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.化二次型为标准型的方法有哪些？ 2.配方法的技巧 3. 合同变换法的本质 二次型中最简单的一种是只包含平方项的二次型 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$. 如何将二次型化为上面的标准形呢？	检验预习效果 提出问题，引起学生的学习兴趣。
	一、标准形 **定义 1：** 只包含平方项的二次型 $$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2 \qquad （1）$$ 称为标准形， 式（1）中 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 里不等于零的数的个数等于标准形	

线 下 讲 授 新 课	式（1）的秩，标准形式（1）的矩阵为对角矩阵 $\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$。 注 1：数域 P 上任意一个二次型都可以经过数域 P 上的非退化线性替换变成标准形。 注 2：在数域 P 上任意一个对称矩阵在数域 P 上都合同于一对角矩阵。 **二、化二次型为标准形的方法** 1. 配方法 **情形 1：** 如果二次型式（5.1）含 x_i 的平方项，就集中所有含 x_i 的交叉项，然后与 x_i^2 配方，按下列公式 $$ax_i^2+bx_i=a\left(x_i+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} \qquad (2)$$ 配成完全平方，式（2）中，a 为二次型式（1）中 x_i^2 的系数，b 为二次型式（1）中所有含有 x_i 的交叉项提出 x_i 后的和，之后做非退化线性替换： $$\begin{cases} y_1=x_1 \\ \cdots \\ y_{i-1}=x_{i-1} \\ y_i=x_i+\dfrac{b}{2a} \\ y_{i+1}=x_{i+1} \\ \cdots \\ y_n=x_n \end{cases}，即：\begin{cases} x_1=y_1 \\ \cdots \\ x_{i-1}=y_{i-1} \\ x_i=y_i-\dfrac{b}{2a} \\ x_{i+1}=y_{i+1} \\ \cdots \\ x_n=y_n \end{cases}，$$ 就将 n 元二次型式（1）化成一个平方项加上一个关于 $y_1,\cdots,y_{i-1},y_{i+1},\cdots,y_n$ 的 $n-1$ 元二次型，如果这个 $n-1$ 元二次型有平方项，重复上述过程，就将其化成一个平方项加上一个 $n-2$ 元二次型，否则转情形 2。 **情形 2：** 如果二次型式（1）不含平方项，设 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则可先作非退化线性替换： $$\begin{cases} x_i=y_i+y_j \\ x_j=y_i-y_j \\ x_k=y_k\ (k=1,2,\cdots,n;k\neq i,\ j) \end{cases}$$	“**抽丝剥茧**”形象描述此法 此例用合同法

线下讲授新课

把 n 元二次型式（1）化成一个含平方项 y_i^2 的二次型，再转到情形 1，如此下去有限步后就将二次型式（1）用非退化线性替换化为标准形。

2. 合同变换法：

第一步：写出二次型式（1）的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并构造 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$；

第二步：对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$ 施行初等列变换并对 $\boldsymbol{A}$ 施行同样的初等行变换，把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}_n$ 化为可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，此时 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$。

第三步：写出非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化二次型为标准形 $f=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$。

例 1：求一个非退化线性替换，将 3 元二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$ 化成标准形。

解： 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}$。

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{E}_3\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&0&-2\\1&-2&0\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第2行加到第1行}]{\text{第2列加到第1列}}\left(\begin{array}{ccc}2&1&-1\\1&0&-2\\-1&-2&0\\ \hdashline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第1行的}-\frac{1}{2}\text{倍加到第2行}\\ \text{第1行的}\ \frac{1}{2}\text{倍加到第3行}}]{\substack{\text{第1列的}-\frac{1}{2}\text{倍加到第2列}\\ \text{第1列的}\ \frac{1}{2}\text{倍加到第3列}}}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第2行的}-3\text{倍加到第3行}]{\text{第2列的}-3\text{倍加到第3列}}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&4\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&2\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{array}\right)$$

注：当二次型的矩阵主对角线元素都为零时，不能采用换列和换行的方法将主对角线上第一个元素化为非零元，而应该在第一步采用将其它某列和相应的行分别加到第一列、第一行的方法，例如该例就是在第一步中将二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列，第 2 行加到第 1 行。

行变再做相同的列变，体现”**对称美**”

线下讲授新课

设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{C'AC}=\boldsymbol{D}$。

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，即：

$$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+2y_3\\ x_2=y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3\\ x_3=y_3\end{cases}\tag{1}$$

式（1）是一个非退化线性替换，将其代入原二次型可得其标准形：

$$f=\boldsymbol{X'AX}=(\boldsymbol{CY})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CY})=\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{C'AC})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y'DY}=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+4y_3^2$$

例 2： 用非退化线性替换化 3 元二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 为标准形。

解：
$$f=\underbrace{x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2}_{\text{这是一个含有平方项的3元二次型, 将其按}x_1\text{进行配方}}$$

$$=\left(x_1^2+2x_2x_1\right)+3x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$$

$$=\underbrace{\left(x_1+x_2\right)^2}_{\text{这是一个平方项}}+\underbrace{2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2}_{\text{这是一个不含}x_1\text{的2元二次型，它有平方项，将其按}x_2\text{进行配方}}$$

$$=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(2x_2^2+2x_3x_2\right)+2x_3^2$$

$$=\left(x_1+x_2\right)^2+\underbrace{2\left(x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2}_{\text{这是一个平方项}}+\underbrace{\frac{3}{2}x_3^2}_{\text{这是一个1元二次型}}$$

由于上面依次按 x_1,x_2 进行配方，因此令：

此例用配方法。

秩不变体现形**变质不变**的哲学思想

	$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 为所用的非退化线性替换，将其代入原二次型可得其标准形：$f = y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2$。	
新知扩展	同一个二次型化标准形是否唯一呢？	拓展学生思维
小结	配方法与合同法是化二次型为标准形的两种重要方法，总结两种方法的技巧和本质。	
思考与练习	化三元二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并求所用的非退化线性替换的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 。 **解**：因为 f 中不含有平方项，所以令： $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 即： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 代入 f 中，得：	巩固复习

<table>
<tr><td></td><td>

$$\begin{aligned} f &= 2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3 \\ &= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \end{aligned}$$

再配方：

$$\begin{aligned} f &= \left(2y_1^2-4y_1y_3\right)-2y_2^2+8y_2y_3 \\ &= 2(y_1-y_3)^2+\left(-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3\right) \\ &= 2(y_1-y_3)^2+\left(\left(-2y_2^2+8y_2y_3\right)-2y_3^2\right) \\ &= 2(y_1-y_3)^2+\left(-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2\right) \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2 \end{aligned}$$

令：$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$，亦即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则二次型 f 化成标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$，所用的非退化线性替换的系数矩阵为：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

</td><td>此题在学习通自制微课“化二次型为标准型的方法总结微课”中有讲解，线上线下融合，促进理解。</td></tr>
<tr><td>作业</td><td>P_{233} 1（I）1） 2） P_{234} 2 － 4</td><td>巩固所学</td></tr>
<tr><td>阅读文献</td><td>1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。
2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。
3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社</td><td>多角度学习触类旁通</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td>1.线上视频课的此部分内容讲授的合同变换法与线下讲授的方法不同，但殊途同归，发现有些学生对此异同产生了困惑与混淆。
应对办法：线下教学对这个问题要给学生解释清楚。
2.学习通讨论区有关概念性问题的答复较为活跃，但是对于思考性问题却不活跃。 应对办法：在微信群、线下课堂点名表扬讨论问题积极的学生，以带动更多学生参与讨论。</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§5.3　唯一性</td><td>教学时数</td><td>3 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1. 了解规范型的定义
2. 了解不同数域上规范型。
3. 理解惯性定律</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">熟练掌握实数域与复数域上化二次型为规范形
理解同一数域上化二次型为规范型的唯一性；
提高解题的逻辑思维能力。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">1.　理解唯一性体现”形变质不变”的哲学思想
2.　理解实规范型和复规范型的不同体现”具体问题具体分析”　的哲学思想</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">二次型的秩、实二次型的规范形、复二次型的规范形。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">实数域与复数域上化二次型为规范形及其规范性的唯一性。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（1.2 学时+1.8 学时）
线上（1.2 学时）
（1）　预习学银在线视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）完成作业后，学习学习通的作业题微课（自制）
线下（1.8 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+
线上自制知识点总结微课+
线上自制习题讲解微课+
线下多媒体教学）</td></tr>
</table>

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 问题 1：规范型的定义 问题 2：唯一性的含义 问题 3：惯性定律的内容 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课。 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题。 **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计“了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验“的”成绩统计“，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。

<table>
<tr>
<td>线
下
课
程
导
入</td>
<td>

提问学生：通过线上预习，有哪些收获？

1.二次型的规范型的定义？

2.怎样理解“唯一性“

3. 惯性定律的内容

经过非退化线性替换，二次型的矩阵变成一个与之合同的矩阵. 合同的矩阵有相同的秩，这就是说，经过非退化线性替换后，二次型矩阵的秩是不变的. 标准形的矩阵是对角矩阵，而对角矩阵的秩就等于它对角线上不为零的平方项的个数. 因之，在一个二次型的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关，二次型矩阵的秩有时就称为二次型的秩.

至于标准形中的系数，就不是唯一确定的. 在一般数域内，二次型的标准形不是唯一的，而与所作的非退化线性替换有关.

</td>
<td>结合旧知，引出新知。</td>
</tr>
<tr>
<td>线
下
讲
授
新
课</td>
<td>

一、实、复二次型的规范形

1.复二次型规范形的定义

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个复二次型，经过一适当的复数域上的非退化线性替换后，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成标准形：

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,d_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r \qquad (1)$$

r 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩，再作复数域上一非退化线性替换：

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r, \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

式（1）就变成

</td>
<td>强调同一个二次型在不同数域上的规范型的不同。（体现”具体问题具体分析”的哲学思想）</td>
</tr>
</table>

线下讲授新课

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2 \quad , \qquad (2)$$

式（2）就称为复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形，它完全被复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩所确定。

2.实二次型规范形的定义

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实二次型，经过某一实数域上的非退化线性替换，可使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2, \qquad (3)$$

式（3）中的 $d_i>0,\ i=1,2,\cdots,r$，而 r 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩。 再作实数域上一非退化线性替换：

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

式（3）就变成

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \qquad (4)$$

式（4）称为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形。规范形式（4）完全被 r,p 这两个数所决定， $p,r-p$ 与 $p-(r-p)=2p-r$ 分别叫做实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正、负惯性指数与符号差。

3.唯一性

任一复二次型经过一适当的复数域上的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的，由原复二次型的秩唯一确定；任一实二次型，经过一适当的实数域上的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的（后者称为惯性定理）。

思政：

一个二次型不同形式的标准型有统一的规范型体现”形变质不变”

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
4.复数域与实数域上的矩阵合同的充分必要条件

1） 任一复数对称矩阵合同于一个形式为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$的对角矩阵，$r$ 为该复数对称矩阵的秩，且 r 可以为零，从而有两个复数对称矩阵在复数域上合同的充分必要条件是它们的秩相等，因此两个复二次型等价当且仅当它们的规范型相同，当且仅当它们的秩相同。
2）任一实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于一个下述形式的对角矩阵：
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \quad (5)$$
矩阵式（5）的主对角线上 1 的个数 p 及-1的个数$r-p$（r 等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩）都是唯一确定的，分别称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及实二次型 $\boldsymbol{X'AX}$ 的正、负惯性指数， 它们的差$2p-r$称为 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{X'AX}$ 的符号差。两个实对称阵在实数域上合同当且仅当它们有相同的秩和正惯性指数,两个实二次型等价当且仅当它们的秩相等，而且正惯性指数也相同。
3）任何一个 n 级可逆复对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一：
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}(n=2r),\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}(n=2r+1)$$
4）任何一个 n 阶可逆实对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一：
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$
</td>
<td>的哲学思想</td>
</tr>
<tr>
<td>新
知
扩
展</td>
<td>线上视频课有课外拓展内容。</td>
<td>培养学生的逻辑思维能力</td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>实数域与复数域上的二次型化为规范形的方法，理解唯一性。复数域与实数域上的矩阵合同的充分必要条件。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

思考与练习	惯性定律的证明技巧	对于本节课的教学重点是否掌握牢固.
作业	P_{233} 1（II） 1） 2）	巩固所学
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	多角度学习触类旁通
教学反思	1. 学生对惯性定律的证明问题较大，不理解证明方法。 应对办法：晚上钉钉开直播，重新讲解该定理的证明。 2. 通过学习通后台的统计，发现个别学生存在拖拽视频、倍速听课问题，不按时完成视频预习的问题。 应对办法：设置禁止拖拽；微信群里表扬按时完成视频学习的同学，并点名督促未完成学生。	

<table>
<tr><td>题目</td><td>§5.4　正定二次型</td><td>教学时数</td><td>5 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="3">1. 了解正定二次型的定义。
2. 了解正定二次型、半正定二次型的区别
3. 了解一些正定二次型的等价条件</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="3">掌握正定二次型及其性质；
熟练掌握正定性以及与正定性平行的几个类型的判别；
提高学生解决问题的逻辑思维能力。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="3">用”正定性”类比”正能量”，激励学生树立正确的人生观、价值观</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="3">正定二次型及其性质、正定性的判别、与正定二次型平行的几个类型。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="3">正定性以及与正定性平行的几个类型的判别。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（2 学时+3 学时）
线上（2 学时）
（1）预习学银在线视频课
（2）随堂练习或预习练习
（3）钉钉直播
（4）学习学习通第五章思政总结微课（自制）
线下（3 学时）
讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td>线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+
线上自制知识点总结微课+
线上自制习题讲解微课+
线下多媒体教学）</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td>线
上
教
学</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
问题 1：正定性的定义
问题 2：正定二次型与正定矩阵的判定方法</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果</td></tr>
</table>

过 程	2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 3.学习通-测验布置本章测验题，并设置考试时间、学生互评。 4.结合第 5 章知识点总结，录制第 5 章思政元素微课，设为任务点。 **学生：（线上学习内容）** 5. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 6. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 **教师：（线上教学总结）** 7. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 8. 借助“学习通随堂测”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	2. 检验预习效果 3. 线上测试检验本章学习效果，节省课下学时 4. 总结本章分散的思政元素，加大立德树人的效果，实现立德树人的目标 7. 8. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.正定二次型的定义 2.正定性的分类 3.正定二次型的判定方法 是否存在二次型，函数值恒正呢？	检验线上预习效果 提出问题，引出新课，引起兴趣。
	一、定义 **定义 1：** 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实二次型，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，就称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为	

线下讲授新课

正定的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**负定**的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**半正定**的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**半负定**的；如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 既不是半正定又不是半负定，那么它就称为**不定**的。

实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定的、负定的、半正定的、半负定的，如果实二次型 $\boldsymbol{X'AX}$ 是正定的、负定的、半正定的、半负定的。

定义 2：子式

$$P_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}(i=1,2,\cdots,n)$$

称为矩阵 $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{nn}}$ 的**顺序主子式**。

注：

1) $\boldsymbol{A}(1,2,\cdots,k)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{k\times k}$

称为 A 为**第 k 阶顺序主子矩阵**；

2) $$\boldsymbol{P_k=\det A(1,2,\cdots,k)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

称为 A 的**第 k 阶顺序主子式.**

（3）

$$|Q_k|=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

即行指标与列指标相同的 $\boldsymbol{k}$ 阶子

。

称为 A 的一个 **k 阶主子式.**

思政：

讲授此定义时用”**正定性”类比”正能量**”，激励学生树立正确的人生观、价值观

引申定义，加深理解

线下讲授新课

定理 7 实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX$$

是正定的 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的顺序主子式全大于零。

证：必要性. 设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 正定，对每一个 $k(1\le k\le n)$，

令 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$

$$=(x_1,x_2,\ldots,x_k)A(1,2,\cdots,k)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$$

对任意一不全为零的数 $c_1,c_2,\ldots,c_k$，有

$$f_k(c_1,c_2,\ldots,c_k)=f(c_1,c_2,\ldots,c_k,0,\ldots,0)>0$$

$\therefore f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 是正定的，从而 $A(1,2,\cdots,k)$ 正定.

$$\therefore\quad P_k=\det A(1,2,\cdots,k)>0,\ \ \mathrm{k}=1,2,\cdots,n.$$

充分性：对 n 作数学归纳法.

n＝1 时，$a_{11}=|a_{11}|>0.\therefore f(x_i)=a_{11}x_1^{\,2}$，正定. 结论成立.

假设对于 n－1 元二次型结论成立，下证 n 元的情形.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 令

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n-1}\end{pmatrix},\ \alpha=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{n-1,n}\end{pmatrix},$$ 则

$$A=\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\alpha'&a_{nn}\end{pmatrix}$$

又 A 的顺序主子式全大于零，所以 A1 的顺序主子式也全大于零.

由归纳假设，A1 正定，即存在可逆矩阵 G，使

此处证明强调定义法，培养学生的应用能力

此处证明讲解的数学归纳法，培养学生的逻辑思维能力，并且讲授中与多项式一章的证明相联系，此类比体现了事物普遍联系的观点。

线下讲授新课

$G'A_1G=E_{n-1}$.

令 $C_1=\begin{pmatrix}G&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $C_1'AC_1=\begin{pmatrix}G'&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\alpha'&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{n-1}&G'\alpha\\\alpha'G&a_{nn}\end{pmatrix}$

再令

$C_2=\begin{pmatrix}E_{n-1}&-G'\alpha\\0&1\end{pmatrix}$，

$$C_2'(C_1'AC_1)C_2=\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\-\alpha'G&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1}&G'\alpha\\\alpha'G&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1}&-G'\alpha\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\0&a_{nn}-\alpha'GG'\alpha\end{pmatrix}$$

再令 $C=C_1C_2$，$a=a_{nn}-\alpha'GG'\alpha$，则有

$$C'AC=\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\0&a\end{pmatrix}$$

两边取行列式，得 $|C|^2|A|=a$。

又 $|A|>0$，$\therefore a>0$

即 $\begin{pmatrix}E_{n-1}&\\&a\end{pmatrix}$ 为正对角矩阵.

由判定充要条件 3). 知 A 正定，所以 $X'AX$ 正定.

例 判定二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

是否正定。

二、判别

设 A 是 n 级实对称矩阵。

1）正定二次型（正定矩阵）的判别

（1）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 是正定的当且仅当

$$d_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

证： 充分性显然. 下证必要性，若 f 正定，取

$$X_0=(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)',i=1,2,\cdots,n$$

则 $f(X_0)=d_ix_i^2>0$，$\therefore\ d_i>0,i=1,2,\cdots,n$。

思政：

分块矩阵的初等变换方法与一般的初等变换方法体现了“特殊与一般”的辩证关系

线下讲授新课

（2）实二次型 $f(X)=X'AX$ 是正定的当且仅当它的正惯性指数等于 n.

证：设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 经非退化线性替换 $X=CY$ 变成标准形

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

由 1)，f 正定 $\Leftrightarrow d_i>0, i=1,2,\cdots,n$。

实二次型 $f(X)=X'AX$ 是正定的当且仅当它的正惯性指数等于 n.

（2） A 是正定的当且仅当 A 与单位矩阵 E_n 在 $\mathbf{R}$ 上合同。

证：正定二次型的规范形为 $z_1{}^2+z_2{}^2+\cdots+z_n{}^2=Z'EZ$。

（4）A 是正定的当且仅当矩阵 A 的顺序主子式全大于零。

（5）A 是正定的当且仅当有实可逆矩阵 C，使得 $A=C'C$。

证：∵A 与 E 合同,即存在可逆矩阵 C 使 $A=C'EC=C'C$。

（6）实对称矩阵 A 正定⇔A 与任一正对角矩阵合同.

若

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},\quad d_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

为任一正对角矩阵，则

$$D=\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$$

即 D 与 E 合同.

注：非退化线性替换不改变矩阵的正定性。

证明：设正定二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$。经过非退化线性替换 X ＝ CY 化成

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Y'(C'AC)Y=g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

任取一组不全为零的数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$，

令 $$Y_0=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},\quad X_0=CY_0=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

思政：

非退化线性替换不改变矩阵的秩体现了“形变质不变”的哲学思想

线 下 讲 授 新 课	$f(c_1,c_2,\ldots,c_n)=X_0'AX_0=Y_0'(C'AC)Y_0=g(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ 又由于 C 可逆， $Y_0\neq 0$，所以 $X_0\neq 0$，即 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 不全为 0， $\therefore\ \ g(k_1,k_2,\ldots,k_n)=f(c_1,c_2,\ldots,c_n)>0$ $\therefore\ \ g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 正定. 反之，实二次型 $g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 可经过非退化线性替换 Y=$C^{-1}X$ 变到实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，同理，若 g 正定，则 f 正定. 所以，非退化线性替换不改变二次型的正定性. 2）负定二次型（负定矩阵）的判别 实二次型 $X'AX$（实对称阵 A）是负定的当且仅当实二次型 $-X'AX$（实对称阵 $-A$）是正定的。 （1）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是负定的当且仅当它的负惯性指数等于 n。 （2）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 是负定的当且仅当 $$d_i<0,i=1,2,\cdots,n;$$ （3）A 是负定的当且仅当 A 与 $-E_n$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同。 （4）A 是负定的当且仅当矩阵 A 的奇数级顺序主子式都小于零，偶数级顺序主子式都大于零。 （5）A 是负定的当且仅当有实可逆矩阵 C 使 $A=-C'C$。 （6）A 是负定的当且仅当矩阵 A 的特征值全是负的。 3）半正定二次型（半正定矩阵）的判别 （1）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的当且仅当它的正惯性指数与秩相等。 （2）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 半正定当且仅当 $$d_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n$$ （3）A 是半正定的当且仅当 A 与矩阵 $\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同，其中 r 为	此处取特殊值法教学更有利于培养学生举一反三

线 下 讲 授 新 课	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。 （4） $\boldsymbol{A}$ 是半正定的当且仅当有 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。 （5） $\boldsymbol{A}$ 是半正定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于等于零。 4）半负定二次型（半负定矩阵）的判别 实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ （实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ ）是半负定的当且仅当实二次型 $-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ （实对称矩阵 $-\boldsymbol{A}$ ）是半正定的。 （1）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半负定的当且仅当它的负惯性指数与秩相等。 （2）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 是半负定的当且仅当 $d_i\le 0,i=1,2,\cdots,n$ 。 （3）$\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同，其中 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。 （4） $\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当有 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ ； （5） $\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全小于等于零。 **注：**① 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，k 是正实数，m 是正整数，则 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^m,\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵； ② 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 也是正定矩阵。	
新 知 扩 展	1. $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全大于零。 证明：若实对称矩阵 A 正定 ，则 A 的任意一个 k 阶主子式 $\lvert Q_k\rvert=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix}>0.$ 证：作二次型 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_si_t}x_{i_s}x_{i_t}$	此方法的证明与本节所讲的定理证明方法类似，培养学生学以致用。

新 知 扩 展	$=(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k})Q_k\begin{pmatrix}x_{i_1}\\x_{i_2}\\\vdots\\x_{i_k}\end{pmatrix}$ 对任意一不全为零的数$c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_k}$，有$X_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'\neq 0,$ 其中$c_j=\begin{cases}c_{i_s}, & 当\ j=i_s,\ s=1,2,\cdots,k\\0, & 当\ j\neq i_s,\ s=1,2,\cdots,k\end{cases}$ 由于 A 正定，有 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$ 正定，即有$X_0'AX_0>0,$ $g(c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k})=f(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,c_{i_2},0,\cdots,c_{i_k},0,\cdots,0)$ $=X_0'AX_0>0$。 即，$g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$是正定二次型，因此其矩阵的是正定二次型，因此其矩阵的$\|Q_k\|>0$.2. A 是正定的当且仅当矩阵 A 的特征值全是正的。	此处特殊值的取法非常具备普遍意义，是值得学习和注意的技巧。
小 结	本节介绍了正定二次型及其性质、正定性的判别、与正定二次型平行的几个类型。	

思考与练习	思考：设 A 是 n 级正定矩阵，则 $k>0$ 时，$A^{-1},kA,A^{*}.A^{n}$ 都是正定矩阵. **证明** 由于 A 正定，存在可逆矩阵 C，使 $C'AC=E$， $\therefore\quad C^{-1}A^{-1}(C')^{-1}=E$，从而 A^{-1} 为正定矩阵. $\forall 0\neq X\in R^{n}$，$X'AX>0$，$\therefore\ X'(kA)X>0\,(k>0)$ $\therefore\quad kA$ 正定。又 A 正定，$\lvert A\rvert>0$，A^{-1} 正定，$A^{*}=\lvert A\rvert A^{-1}$ 正定. $\lvert A^{k}\rvert=\lvert A\rvert^{k}\neq 0$，$A^{k}$ 对称 当 $m=2k$ 时，$A^{m}=A^{2k}=(A^{k})'EA^{k}$，从而 A^{m} 正定. 当 $m=2k+1$ 时，$A^{m}=A^{2k+1}=(A^{k})'A(A^{k})$ 所以 A^{m} 与 A 合同，因而 A^{m} 正定.	正定性的证明方法总结
作业	P235 13-17	巩固所学
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	1.学习通讨论区有学生对正定性、半正定的概率自行进行归类、统一 **应对办法：**线上讨论区回复正解，线下课堂强调易错点。 2.线上教学发挥了作用，否则传统课堂很难发现个别学生的错误认识。线上学习氛围还要继续保持和加强，经过了三周的线上学习，学生已经形成线上提问的习惯。 3.本节课由正定性引出的思政元素教学，获得了学生的认同，学生能够自然接受。 4.章末测验采用的是线上测验，并且第二节课提交了纸质版，从测验答题情况看，本章学习存在以下问题： （1）合同变换法与一般的初等变换出现混淆。 （2）关于正定性的证明找不到思路。 （3）二次型的矩阵易忽略对称性要求。 **应对办法：**（1）教学中要注重将相似概念讲清楚联系和区别。 （2）注重证明思路及方法讲解。 （3）加强概念性教学。 5.线上自制的第 5 章思政微课（自制）学生学习后，线上发起问卷调查，学生本章的思政部分教学较为认可和接受。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§6.1　集合、映射</td><td>教学时数</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1.　理解单射、满射、双射的概念
2.　理解集合间的关系</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握集合、映射 1-1 对应及其与之相关的概念。
掌握集合运算、映射运算的符号和性质。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">集合论的数学史教育激励学生勇于探索</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">集合、映射的概念。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">映射的判断。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时）
线上（0.8 学时）
（1）预习学银在线视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+
线上自制知识点总结微课+
线上自制习题讲解微课+
线下多媒体教学）</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td>线上教学过程</td><td colspan="3">教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
问题：单射、满射、双射的定义和判定

2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。

学生：（线上学习内容）
3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
　并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4. 通过视频课预习，</td></tr>
</table>

	教师：（线上教学总结） 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.单射、满射、双射的定义 2.判定 线性空间是高等代数研究的最基本而重要的内容，线性空间是从集合、运算和规则抽象而成的概念。因此学习线性空间首先从集合入手。	从学生熟悉的集合和映射入手，引起学生学习兴趣。
线下讲授新课	**一、集合** 集合是数学中最基本的概念之一，所谓集合就是指作为整体看的一堆东西.组成集合的东西称为这个集合的元素.用 $$a \in M$$ 表示 a 是集合 M 的元素，读为：a 属于 M .用 $$a \notin M$$ 表示 a 不是集合 M 的元素，读为：a 不属于 M . 所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成的.因此给出一个集合的方式不外两种，一种是列举法：列举出它全部的元素，一种是描述法：给出这个集合的元素所具有的特征性质. 设 M 是具有某些性质的全部元素所成的集合，就可写成 $$M=\{a \mid a具有的性质\}.$$	给出集合的定义和属性，让学生理解合集合的本质，为后面讲解线性空间的定义作准备。

线下讲授新课

不包含任何元素的集合称为空集，记作ϕ.

如果两个集合M与N含有完全相同的元素，即$a \in M$当且仅当$a \in N$，那么它们就称为相等，记为$M = N$.

如果集合M的元素全是集合N的元素，即由$a \in M$可以推出$a \in N$，那么M就称为N的子集合，记为$M \subset N$或$N \supset M$.

两个集合M和N如果同时满足$M \subset N$和$N \subset M$.，则M和N相等.

设M和N是两个集合，既属于M又属于N的全体元素所成的集合称为M与N的交，记为$M \bigcap N$.

属于集合M或者属于集合N的全体元素所成的集合称为M与N的并，记为$M \bigcup N$.

二、映射

设M和M'是两个集合，所谓集合M到集合M'的一个映射就是指一个法则，它使M中每一个元素a都有M'中一个确定的元素a'与之对应.如果映射σ使元素$a' \in M'$与元素$a \in M$对应，那么就记为

$$\sigma(a) = a',$$

a'就为a在映射σ下的像，而a称为a'在映射σ下的一个原像.

M到M自身的映射，有时也称为M到自身的变换.

关于M到M'的映射σ应注意：

1）M与M'可以相同，也可以不同；

2）对于M中每个元素a，需要有M'中一个唯一确定的元素a'与它对应；

3）一般，M'中元素不一定都是M中元素的像；

4）M中不相同元素的像可能相同；

5）两个集合之间可以建立多个映射.

集合M到集合M'的两个映射σ及τ，若对M的每个元素a都有$\sigma(a) = \tau(a)$则称它们相等，记作$\sigma = \tau$..

例 1 M是全体整数的集合，M'是全体偶数的集合，定义

给出映射的定义和属性，让学生理解映射的本质，为后面讲解双射的定义作准备。

线 下 讲 授 新 课	$$\sigma(n)=2n, n\in M,$$ 这是M 到M'的一个映射. 例 2 M 是数域P 上全体n级矩阵的集合，定义 $$\sigma_1(A)=\|A\|, A\in M.$$ 这是M 到P 的一个映射. 例 3 M 是数域P 上全体n级矩阵的集合，定义 $$\sigma_2(a)=aE, a\in P.$$ E 是n级单位矩阵，这是P 到M 的一个映射. 例 4 对于 $f(x)\in P[x]$,定义 $$\sigma(f(x))=f'(x)$$ 这是$P[x]$到自身的一个映射. 例 5 设M ，M'是两个非空的集合，a_0是M'中一个固定的元素，定义 $$\sigma(a)=a_0, a\in M.$$ 这是M 到M'的一个映射. 例 6 设M 是一个集合，定义 $$\sigma(a)=a \quad ,a\in M.$$ 即σ 把M 的每个元素都映到它自身，称为集合M 的恒等映射或单位映射，记为1_M . 对于映射可以定义乘法,设σ 及τ 分别是集合M 到M'，M'到M''的映射，乘积$\tau\sigma$ 定义为 $$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)), a\in M,$$ 即相继施行σ 和τ 的结果，$\tau\sigma$ 是M 到M''的一个映射. 对于集合集合M 到M'的任何一个映射σ 显然都有 $$1_{M'}\sigma=\sigma 1_M=\sigma.$$	此部分与中学数学联系紧密，采用“学生讲授式”。

	映射的乘法适合结合律.设σ,τ,ψ分别是集合M到M'，M'到M''，M''到M'''的映射，映射乘法的结合律就是 $$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma).$$ 设σ是集合M到M'的一个映射，用 $$\sigma(M)$$ 代表M在映射σ下像的全体，称为M在映射σ下的像集合.显然 $$\sigma(M)\subset M'.$$ 如果$\sigma(M)=M'$，映射σ称为映上的或满射. 如果在映射σ下，M中不同元素的像也一定不同，即由$a_1\neq a_2$一定有$\sigma(a_1)\neq\sigma(a_2)$,那么映射$\sigma$就称为$1-1$的或单射. 一个映射如果既是单射又是满射就称$1-1$对应或双射.	
新知扩展	**双射** 对于M到M'的双射σ可以自然地定义它的逆映射,记为σ^{-1}.因为σ为满射，所以M'中每个元素都有原像，又因为σ是单射，所以每个元素只有一个原像，定义 $$\sigma^{-1}(a')=a,当\sigma(a)=a'.$$ 显然，σ^{-1}是M'到M的一个双射，并且 $$\sigma^{-1}\sigma=1_M,\sigma\sigma^{-1}=1_{M'}.$$ 如果σ,τ分别是M到M'，M'到M''的双射，那么乘积$\tau\sigma$就是M到M''的一个双射.	给出双射的定义和属性，让学生理解双射的本质，为后面讲解线性变换的定义作准备。
小结	本节主要讲述集合与映射的相关概念及性质。	

思考与练习	任意一个定义在全体实数上的函数 $$y = f(x)$$ 都是实数集合到自身的映射，因此函数可以认为是映射的一个特殊情形.	此题加深学生对映射的理解。一个代数运算只是一个特殊的映射。
作业	P268 1、2。	巩固所学
阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。	
教学反思	1. 通过提问发现学生对定义的本质认识不够 应对办法：通过多举例加深理解 2. 教学方法可改进为：本节课可完全采用线上视频课教学，线下采用提问式、讨论式，提高学生的自主学习能力。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§6.2 线性空间的定义与简单性质</td><td>教学时数</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1. 记住线性空间定义的“2+8”条
2. 了解线性空间的特殊元素</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">深刻理解线性空间的定义，熟记线性空间的简单性质。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">1. 向量、线性空间的数学史教育培养学生追根溯源的学习态度
2. 用亚里士多德、牛顿、莱布尼茨等科学家的伟大成就激励学生勇于探索
3. 用线性空间的零元类比“螺丝钉”精神，培养集体主义精神
4. 培养严谨的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">线性空间的概念、性质。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">线性空间的定义及判别。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时）
线上（0.8 学时）
（1）预习学银在线视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）完成作业后，学习学习通的 3 题作业题微课（自制）
线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+线上自制知识点总结微课+线上自制习题讲解微课+线下多媒体教学）</td></tr>
</table>

教学过程		设计意图
线 上 教 学 过 程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 问题 1：线性空间的定义“2+8”条 问题 2：线性空间的零元和单位元的定义 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **3.录制线性空间发展史微课，并上传学习通** 4. **录制书后 3 题作业微课，并上传学习通** **学生：（线上学习内容）** 5. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 6. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 课后学习学习通 3 题作业微课（自制） **教师：（线上教学总结）** 7. 通过学习通后台的“统计“了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 8. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3. 用数学史对学生思政教育 4. 重点内容，计算繁琐，适合录成微课反复学习 5、6. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 7、8. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。

<table>
<tr>
<td>线
下
课
程
导
入</td>
<td>**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？**
1. 线性空间定义的“2+8”条
2. 线性空间的特殊元素有哪些？

公理化方法是一种重要的数学思想方法，数学的严密化就是通过各个分支的公理化来完成的。公理化方法是从原始概念和公理（不证自明的命题）出发，按照一定的逻辑推理规则，定义出其他所有派生的概念推导出其他所有定理的一种演绎方法。而线性空间的定义就是采用公理形式进行描述。</td>
<td>检验预习效果
思政：
给同学拓展公理化方法的介绍，并介绍向量和线性空间的发展史，用数学家的故事激励学生用于探索，热爱数学。</td>
</tr>
<tr>
<td>线
下
讲
授
新
课</td>
<td>一、线性空间的定义.
例 1　在解析几何里,讨论过三维空间中的向量.向量的基本属性是可以按平行四边形规律相加，也可以与实数作数量算法.不少几何和力学对象的性质是可以通过向量的这两种运算来描述的.
1^0 按平行四边形法则所定义的向量的加法是 V_3 的一个运算;
2^0 解析几何中规定的实数与向量的乘法是 $R\times V_3$ 到 V_3 的一个运算.
3^0 由知道，空间上向量的上述两种运算满足八条运算规律.
例 2. 数域 P 上一切矩阵所成的集合对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法满足上述规律.
定义 1 令 V 是一个非空集合，P 是一个数域.在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算，叫做加法；这就是说给出了一个法则，.对于 V 中任意两个向量 α 与 β ,在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应,称为 α 与 β 的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$.在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法；这就是说，对于数域 P 中任一个数 k 与 V 中任一个元素 α ,在 V 中都有唯一的一个元素 δ 与它们对应,称为 k 与 α 的数量</td>
<td>有许多不同形式的对象，但是有一些共同的特点，将它们抽象到一起，就得到线性空间的定义。通过公理化的方法，给出线性空间的定义。</td>
</tr>
</table>

线下讲授新课

乘积,记为 $\delta = k\alpha$.如果加法与数量乘法满足下述规则，那么 V 称为数域 P 上的线性空间.

加法满足下面四条规则：:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3) 在 V 中有一个元素 0, $\forall\alpha\in V$,都有 $\alpha+0=\alpha$（具有这个性质的元素 0 称为 V 的零元素）;

4) $\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V, st\quad \alpha+\beta=0$ (β 称为 α 的负元素).

数量乘法满足下面两条规则:

5) $1\alpha=\alpha$;

6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

在以上规则中，k,l 等表示数域 P 中任意数；α,β,γ 等表示集合 V 中任意元素.

例 3 数域 P 上一元多项式环 $P[x]$,按通常的多项式加法和数与多项式的乘法，构成一个数域 P 上的线性空间.如果只考虑其中次数小于 n 的多项式，再添上零多项式也构成数域 P 上的一个线性空间，用 $P[x]_n$ 表示.

例 4 元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵，按矩阵的加法和数与矩阵的数量乘法，构成数域 P 上的一个线性空间，用 $P^{m\times n}$ 表示.

例 5 全体实函数，按函数加法和数与函数的数量乘法，构成一个实数域上的线性空间.

例 6 数域 P 按照本身的加法与乘法，即构成一个自身上的线性空间.

思政：零元类比“螺丝钉”精神，培养集体主义精神

线性空间是一个抽象的集合，越抽象包含的例子越多。让学生从例子里体会线性空间的内

线 下 讲 授 新 课	例 7　以下集合对于所指定的运算是否作成实数域 R 上的线性空间: 1) 平面上全体向量所作成的集合 V ,对于通常向量的加法和如下定义的纯量乘法: $$a\alpha = 0, a \in R, \alpha \in V.$$ 2) R 上 n 次多项式的全体所作成的集合 W 对于多项式的加法和数与多项式的乘法. 例 8 设 V 是正实数集, R 为实数域.规定 $$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \text{(即} \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的积)}, a \odot \alpha = \alpha^{a} \text{(即} \alpha \text{ 的 } a \text{ 次幂)},$$ 其中 $\alpha, \beta \in V, a \in R$.则 V 对于加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 作成 R 上的线性空间. 例 9　设 $[a, b]$ 是实数轴上的一个闭区间，$[a, b]$ 上的连续函数全体记作 $C[a, b]$. 从数学分析课程知道，$[a, b]$ 上的两个连续函数的和仍是连续函数，实数 k 与连续函数 f 的纯量乘积 kf 也是连续函数. 因此，$C[a, b]$ 是实数域上的一个向量空间. 例 10　类似于例 9，区间 $[a, b]$ 上所有 n 次可微函数(1 阶，2 阶，…，n 阶导数存在的函数)组成的集合是实数域上的一个向量空间，记作 $C^{(n)}[a, b]$.	涵。
新 知 扩 展	**线性空间的简单性质** 线性空间的元素也称为向量.当然这里的向量比几何中所谓向量的涵义要广泛得多.线性空间有时也称为向量空间.以下用黑体的小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 代表线性空间 V 中的元素，用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 代表数域 P 中的数. 1.零元素是唯一的.2.负元素是唯一的. 3. $0\alpha = 0; k0 = 0; (-1)\alpha = -\alpha.$ 4.如果 $k\alpha = 0$,那么 $k = 0$ 或者 $\alpha = 0$.	线性空间的性质必须根据定义进行证明，体现代数的严谨性。

小结	本节主要讲述线性空间的定义；零元的唯一性；负元的唯一性。	
思考与练习	设W_1和W_2是数域P上的线性空间，令 $V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$，对$\forall(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\in V$，$\forall k\in P$，定义： $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2)$，$k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(k\boldsymbol{\alpha}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2)$ 证明：V按如上定义的加法和数量乘法作成数域P上的线性空间。 **证明：**由题设知V是非空集合，且上述给定的加法和数乘运算符合线性空间定义的加法和数量乘法的定义，即给定的加法是$V\times V$到V的映射，给定的数量乘法是$P\times V$到V的映射，且： $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ $((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2))+(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+((\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)+(\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2))$ 设$\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2$分别是$W_1,W_2$的零元素，则$(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2)$是$V$的零元素，且对任意$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\in V$有$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$。 对任意$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\in V$，存在负元$(-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)\in V$使得$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2)$ 其次：对$\forall k,l\in P$：$k(l(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2))=(kl)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$； $(k+l)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+l(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$； $k((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2))=k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+k(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ $1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$。 所以$V$是数域$P$上的线性空间。	此题加深学生对线性空间判定方法的理解。
作业	P268 3、4。	巩固所学

阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	1 学生对于特殊定义的线性空间的加法和数乘运算易混淆 应对办法：多用实例教学 2.单位元、零元的寻找方法需要多举实例讲解。 应对办法：线下教学多举特殊单位元例子 3.本节课将单位元类比“螺丝钉”精神，起到了良好的立德树人教学效果。	

授课题目	§6.3 维数、基与坐标	教学时数	3 学时
线上预习目标	1. 了解维数、基底、坐标的概念 2. 了解常见线性空间的基底与维数		
教学目标	深刻理解线性空间中向量的线性组合、线性表示、向量组的等价，线性相关、线性无关、维数、基与坐标的概念；掌握向量组构成基的条件，会求向量在给定基下的坐标，会求线性空间的基和维数。		
思政目标	1. 培养严谨的**科学精神** 2. **概念类比教学法**使学生理解“**事物普遍联系**”的哲学思想		
教学重点	维数、基与坐标的概念、维数定理。		
教学难点	线性空间基底和维数的求法、向量在给定基下的坐标求法。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.2 学时+1.8 学时） 线上（1.2 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）完成作业后，学习学习通的作业题微课（自制） 线下（1.8 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学 （线上学银在线预习微课+线上自制知识点总结微课+线上自制习题讲解微课+线下多媒体教学）

<table>
<tr><th colspan="2">教学过程</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>线
上
教
学
过
程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
问题 1：维数、基底、坐标的定义
问题 2：线性空间的基底概念与向量组的极大线性无关组的关系

2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。

学生：（线上学习内容）
3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题

教师：（线上教学总结）
5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。

5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
<tr><td>线
下
课
程
导
入</td><td>提问学生：通过线上预习，有哪些收获？
1．线性空间维数、基底、坐标的概念
2. 常见线性空间的基底与维数举例
从前面的学习可知线性空间里包含的元素个数有无数个，能耗用有限元刻画这些无限元呢？这就是线性空间的结构问题。例如平面上的点有无数个，但是可以用坐标轴及坐标来刻画。线性空间能否有类似于几何空间的坐标问题？线性空间能否用具体数组表示向量？这二个问题的答案就是线性空间的基与坐标。其实线性空间的基并不是新概念，当把向量组定义成线性空间时，它的极大线性无关组就是线性空间的一组基，它的秩就线性空间的维数。这节首先从线性空间的内部来研究，主要研</td><td>通过平面坐标轴类比引出线性空间维数、基与坐标的定义，让学生深刻直观理解维数、基与坐标。</td></tr>
</table>

	究向量间元素的关系，线性相关、线性无关、线性表出、两个向量等价。	

线下讲授新课

一、线性空间中向量之间的关系

1、相关定义

定义 2　设V是数域P上的一个线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\ (r\ge 1)$是$V$一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$是数域$P$中的数，那么向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个线性组合，有时也说向量$\alpha$可以用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出.

定义 3　设

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \quad (1) \qquad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \quad (2)$$

是V中两个向量组，如果（1）中每个向量都可以用向量组（2）线性表出，那么称向量（1）可以用向量组（2）线性表出.如果（1）与（2）可以互相线性表出，那么向量组（1）与（2）称为等价的.

定义 4 线性空间V中向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\ (r\ge 1)$称为线性相关，如果在数域$P$中有$r$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0. \qquad (3)$$

如果向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$不线性相关，就称为线性无关.换句话说，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$称为线性无关，如果等式（3）只有在$k_1=k_2=\cdots k_r=0$时才成立.

2、相关结论

1. 单个向量α线性相关的充要条件是$\alpha=0$.两个以上的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关的充要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合.

2. 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而且可以被$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，那么$r\le s$.

由此推出，两个等价的线性无关的向量组，必含有相同个数的向量.

结合线性空间中向量间的关系，给出有限维线性空间基与坐标的定义和求法。

思政：

线性空间类比“向量组”体现“**事物普遍联系**”的哲学思想

	3. 如果向量组$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，但$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，那么$\beta$可以由被$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，而且表示法是唯一的. 二、$n$维线性空间基与坐标的定义 定义 5 如果在线性空间V中有n个线性无关的向量，但是没有更多数目的线性无关的向量，那么V就称为n维的；如果在V中可以找到任意多个线性无关的向量，那么V就称为无限维的. 在一个线性空间中究竟最多能有几个线性无关的向量，显然是线性空间的一个重要属性. 定义 6 在n维线性空间V中，n个线性无关的向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$称为$V$的一组基.设$\alpha$是$V$中任一向量，于是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\alpha$线性相关，因此$\alpha$可以被基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表出： $$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$ 其中系数$a_1,a_2,\cdots,a_n$是被向量α和基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$唯一确定的，这组数就称为$\alpha$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标，记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 由以上定义看来，在给出空间$V$的一组基之前，必须先确定$V$的维数. 三、$n$维线性空间基与坐标的求法 定理 1 如果在线性空间V中有n个线性无关的向量$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且$V$中任一向量都可以用它们线性表出，那么$V$是$n$维的，而$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$就是$V$的一组基.	**思政：** 基底概念类比“极大线性无关组” 体现“**事物普遍联系**”的哲学思想 坐标概念类比线性表出的系数，体现“**事物普遍联系**”的哲学思想

新知扩展	例 1　在线性空间 $P[x]_n$ 中， $$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$$ 是 n 个线性无关的向量，而且每一个次数小于 n 的数域 P 上的多项式都可以被它们线性表出，所以 $P[x]_n$ 是 n 维的，而 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 就是它的一组基. 例 2 在 n 维的空间 P^n 中，显然 $$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0), \\ \varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = (0,0,\cdots,1) \end{cases}$$ 是一组基.对于每一个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,都有 $$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n .$$ 所以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 就是向量 α 在这组基下的坐标. 例 3 如果把复数域 K 看作是自身上的线性空间，那么它是一维的，数 1 就是一组作是实数域上的线性空间，那么就是二维的，数 1 与 i 就是一组基.这个例子告诉我们，维数是和所考虑的数域有关的.	培养学生举一反三
小结	本节主要学习有限维线性空间的基与坐标的定义和求法。	
思考与练习	设　$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2 - \mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix} \middle\vert\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$，i 是虚数单位。求 V 对于矩阵的加法和数量乘法所作成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间的一组基和维数。 **解：**在 V 中任取一个向量 $\begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2 - \mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$，有： $$\begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2 - \mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$ 又 令：$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$，得：$\begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2 - \mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$	此题加深学生对线性空间基与维数的理解。

<table>
<tr>
<td>思考与练习</td>
<td>
令：$x_1=0,x_2=1,x_3=0$，得：$\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
令：$x_1=x_2=0,x_3=1$，得：$\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
知$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\in V$，因此$V$中任一向量都可以由它中的向量$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$线性表出，所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是$V$的一组生成元，下面证明$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$线性无关。
设
$$k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
即
$$\begin{pmatrix} k_1+k_3\mathrm{i} & k_2 \\ -k_1\mathrm{i}+k_2 & -k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
得：$k_1=k_2=k_3=0$
所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$线性无关，因此$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是$V$的一组基，从而有$\dim V=3$。
</td>
<td>需强调基底向量必须属于</td>
</tr>
<tr>
<td>作业</td>
<td>P269 5、6。</td>
<td>巩固所学</td>
</tr>
</table>

阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	1. 学生对线性空间基底的找法存在困难 应对办法：强调概念类比学习法，哲学思想也能促进学习。 2. 对称矩阵的线性空间的基底、维数的理解存在困难。 应对办法：以三阶对称矩阵为例，进行拆解找基底，再由特殊到一般归纳维数计算公式。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td>§6.4 基变换与坐标变换</td><td>教学时数</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="3">了解基变换、坐标变换公式及计算方法</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="3">掌握基变换与坐标变换的概念；熟练掌握基变换与坐标变换运算。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="3">1. 培养严谨的科学精神
2. 基变换公式与坐标变换公式的关系体现事物普遍联系的哲学思想
3. 讨论式学习培养合作精神</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="3">基变换与坐标变换的公式。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="3">过渡矩阵的定义和求法。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时）
线上（0.8 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试

线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td>线上线下混合式教学</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td>线上教学过程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
（1）过渡矩阵的定义
（2）基变换公式与坐标变换公式

2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。

学生：（线上学习内容）
3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4. 通过视频课预习，提前了解本</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>教师：（线上教学总结）
5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td>节课内容，加深知识点理解。

5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
<tr><td>线下课程导入</td><td>提问学生：通过线上预习，有哪些收获？
1.过渡矩阵的定义
2.基变换与坐标变换公式的应用

上节课介绍了线性空间的基本概念，对线性空间的内部元素进行研究。研究了线性空间一个非常重要的概念基。虽然线性空间中包含无穷多的元素，但是基里元素的个数是有限的，利用基可以把包含无限多元素的的线性空间代数结构转化成有限个元素的基来进行研究，从而实现从无限到有限的辩证统一，这也是基带来的好处。刻画线性空间的元素要通过基来实现，但是一个线性空间的基通常不只有一组，不同的基之间有什么关系？每个向量在不同基下都有不同的坐标向量，这些不同基下的坐标向量又有什么关系？</td><td>结合哲学实现无限到有有限的辩证统一思想引出新知，引起学生对基变换和坐标变换本质的理解。</td></tr>
<tr><td></td><td>一、向量（矩阵）的形式写法
把向量
$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n .$$
写成
$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$
把向量的坐标写成一个 $n\times 1$ 矩阵，而把向量看作是这两个矩阵的乘积.</td><td>在 n 维线性</td></tr>
</table>

线下讲授新课

所以说这种写法是”形式的”，在于这里是以向量作为矩阵的元素，一般说来没有意义.不过在这个特殊的情况下，这种约定的用法是不会出毛病的.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间 V 中两组基，它们的关系是

$$\begin{cases}\varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n\ ,\\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n\ ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n\ .\end{cases} \qquad (2)$$

则(2)可以写成

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n') = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

形式写法所具有的一些运算规律.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 中两个向量组，$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 是两个 $n\times n$ 矩阵，那么

$$((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)\ ;$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A + (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)\ ;$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A + (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A = (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A$$

二、基变换

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间 V 中两组基，它们的关系是

$$\begin{cases}\varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n\ ,\\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n\ ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n\ .\end{cases} \qquad (4)$$

设向量 ξ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与

空间中，任意 n 个线性无关的向量都可以取作空间的基.对于不同的基，同一个向量的坐标一般是不同的.随着基的改变，向量的坐标是怎样变化的.

线 下 讲 授 新 课	$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，即 $$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = x_1'\varepsilon_1' + x_2'\varepsilon_2' + \cdots + x_n'\varepsilon_n'. \quad (5)$$ 现在的问题就是找出$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$的关系. 首先指出，(4)中各式的系数 $$(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}),\ j=1,2,\cdots,n$$ 实际上就是第二组基向量$\varepsilon_j'\ (j=1,2,\cdots,n)$在第一组基下的坐标.向量$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$的线性无关性就保证了(4)中系数矩阵的行列式不为零.换句话说，这个矩阵是可逆的. (4)可以写成 $$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n') = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$ 矩阵 $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$的过渡矩阵，它是可逆的. 由(5)知 $$\xi = (\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$ 用(6)代入，得 $$\xi = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$ 与(1)比较，由基向量的线性无关性得到	同一个线性空间中不同基之间的关系就是基变换，类似于两个坐标变换；同一个向量在不同基下的坐标之间的关系就是坐标变换。

线上教学过程

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

或者

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

(7)与(8)给出了在基变换(6)下，向量的坐标变换公式.

例 1　在§3 例 2 中有

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

就是过渡矩阵.不难得出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

也就是

$$x_1' = x_1,\ x_i' = x_i - x_{i-1}\ (i = 2, \cdots, n).$$

与§3 所得出的结果是一致的.

此部分需揭示公式本质

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>新
知
扩
展</td><td>例 2　取V_2的两个彼此正交的单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2$它们作成$V_2$的一个基. 令$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$分别是由$\varepsilon_1,\varepsilon_2$旋转角$\theta$所得的向量，则$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$也是$V_2$的一个基，有
$$\varepsilon_1{}' = \varepsilon_1\cos\theta + \varepsilon_2\sin\theta$$
$$\varepsilon_2{}' = -\varepsilon_1\sin\theta + \varepsilon_2\sin\theta$$
所以｛$\varepsilon_1,\varepsilon_2$｝到｛$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$｝的过渡矩阵是
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$
设V_2的一个向量ξ关于基｛$\varepsilon_1,\varepsilon_2$｝和｛$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$｝的坐标分别为$(x_1,x_2)$与$(x_1',x_2')$.于是由(5)得
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix},$$
即
$$x_1 = x_1'\cos\theta - x_2'\sin\theta\quad,$$
$$x_2' = x_1'\sin\theta + x_2'\cos\theta\quad.$$
这正是平面解析几何里，旋转坐标轴的坐标变换公式.</td><td>用解析几何里坐标旋转让学生体会基变换 与坐标变换的本质。</td></tr>
<tr><td>小
结</td><td>本节主要讲述了过渡矩阵定义和性质；基坐标变换的求解方法。</td><td></td></tr>
<tr><td>思
考
与
练
习</td><td>在 F^3 中，设$\alpha_1=(1,0,-1)$，$\alpha_2=(2,1,1)$，$\alpha_3=(1,1,1)$，$\beta_1=(0,1,1)$
$\beta_2=(-1,1,0)$，$\beta_3=(1,2,1)$，$\alpha=(2,5,3)$。求基α_1，α_2，α_3到基β_1，β_2，β_3的过渡矩阵 T，并且求α 分别在这两个基下的坐标.
解　设α'为α 的转置. 因为
$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \Leftrightarrow \beta' = k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2' + k_3\alpha_3'$$
所以
$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)T \Leftrightarrow (\beta_1',\ \beta_2',\ \beta_3') = (\alpha_1',\ \alpha_2',\ \alpha_3')T\ .$$</td><td>此题加深学生对基变换与坐标变换的理解与灵活应用。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>设 A=(α_1'，α_2'，α_3')，B=(β_1'，β_2'，β_3')，则从(β_1'，β_2'，β_3') =(α_1'，α_2'，α_3')T 得出 B=AT.
接下来求 T．因为
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&-1&1\\0&1&1&1&1&2\\-1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&-1&-3&-2\\0&0&1&2&4&4\end{pmatrix},$$
所以，过渡矩阵
$$T=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{pmatrix}.$$
设α 在基 β_1，β_2，β_3 下的坐标为(y_1，y_2，y_3)，则
$$B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}.$$
解这个线性方程组得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$．因此，由坐标变换公式得到α 在基 α_1，α_2，α_3 下的坐标为(2,－5,10).</td><td></td></tr>
<tr><td>作业</td><td>P269
7、8。</td><td>巩固所学</td></tr>
<tr><td>阅读文献</td><td>1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。
2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。
3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。</td><td></td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td>1. 部分学生课前完成的线上预习视频课，理解不深刻，不能抓住问题本质。
应对办法：线上预习前，给学生布置明确的问题，带着问题预习，预习效果更好。
2.部分学生通过线上学习，未能理解坐标变换公式本质，仍然使用初等数学知识解决问题。
应对办法：线下教学讲授清楚基变换与坐标变换公式在解题中的重要应用。</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课题目</td><td>§6.5 线性子空间</td><td>教学时数</td><td>4 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="3">1. 了解子空间的定义
2. 了解子空间的判定方法
3. 了解基扩张定理</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="3">熟悉子空间、生成向量组的概念。深刻理解生成组等价与生成子空间的关系，子空间基与整个空间基的关系。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="3">1. 理解子空间与子集的关系体现“事物普遍联系”的哲学思想
2. 理解子空间与线性空间的关系体现“局部与整体”的辩证统一思想</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="3">线性子空间的概念。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="3">线性子空间的判定及证明。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时）
线上（1.6 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）完成作业后，学习学习通的作业题微课（自制）
线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td>线上线下混合式教学
（线上学银在线预习微课+线上自制知识点总结微课+线上自制习题讲解微课+线下多媒体教学）</td></tr>
</table>

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 问题 1：线性空间的子空间的定义 问题 2：线性空间的子集是否是子空间？ 问题 3：子空间的判别方法？ 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.子空间的定义 2.子空间的判定 3.举例说明子集是子空间吗？ 前面对线性空间的研究主要从元素的角度进行研究，线性空间主要研究其结构。现将线性空间进行分割，分割成若干小块也就是子空间进行研究，然后对每个子空间总结出它的一些性质来，从子空间角度看清线性空间的代数结构。若一个线性空间有子空间，则可将线性空间看成是子空间的扩张。若线性空间是若干个线性子空间的直和，则这些子空间就是线性空间的分解。本节利用分割的研究方法，是为了从空间的部分	从线性空间结构的角度引出线性子空间的内容，让学生从本质上认识研究线性子空间的意义。

	去认识它内在的代数结构，以得出若干具体的性质与特征。	
线 下 讲 授 新 课	一、线性子空间 1、定义 定义 7 数域 P 上的线性空间 V 的一个非空子集合 W 称为 V 的一个线性子空间（或简称子空间），如果 W 对于 Λ 的两种运算也构成数域 P 上的线性空间. 2、判定 定理 2　如果线性空间 V 的一个非空集合 W 对于 V 两种运算是封闭的，也就是满足上面的条件 1，2，那么 W 就是一个子空间. 既然线性子空间本身也是一个线性空间，上面引入的概念，如维数、基、坐标等，当然也可以应用到线性子空间上. 因为要线性子空间中不可能比在整个子空间中有更多数目线性无关的向量. 所以，任何一个线性子空间的维数不能超过整个空间的维数. 3、例题 例 1 在线性空间中，由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间，它叫做零子空间. 例 2 线性空间 Λ 本身也是 V 的一个子空间. 在线性空间中，零子空间和线性空间本身这两个子空间有时叫做 V 的平凡子空间，而其它的线性子空间叫做非平凡子空间. 例 3 在全体实函数组成的空间中，所有的实系数多项式组成一个子空间. 例 4 $P[x]_n$ 是线性空间 $P[x]$ 的子空间.	思政： 线性子空间也是线性空间，也存在着基与维数，体现“**局部与整体”的辩证统一观点。** 例题让学生讲解，激发学习积极性

<table>
<tr>
<td>线
下
讲
授
新
课</td>
<td>

例 5 在线性空间 P^n 中，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的全部解向量组成一个子空间，这个子空间叫做齐次线性方程组的解空间. 解空间的基就是方程组的基础解系，它的维数等于 $n-r$ ，其中 r 为系数矩阵的秩.

二、生成子空间

1、定义

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性空间 V 中一组向量，这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

所成的集合是非空的，而且对两种运算封闭，因而是 V 的一个子空间，这个子空间叫做由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间，记为

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$

由子空间的定义可知，如果 V 的一个子空间包含向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，那么就一定包含它们所有的线性组合，也就是说，一定包含 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 作为子空间.

</td>
<td>

思政：

任何一个线性空间都可以由它的一组基生成，基是生成元的一个极大线性无关组。体现“**事物的普遍联系**”

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>线
下
新
知
扩
展</td>
<td>在有限维线性空间中，任何一个子空间都可以这样得到. 事实上，设 W 是 V 的一个子空间，W 当然也是有限维的. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 W 的一组基，就有
$$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$
定理 3　1)两个向量组生成相同子空间的充要条件是这两个向量组等价. 2）$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.
定理 4 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一组基，那么这组向量必可扩充为整个空间的基. 也就是说，在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$ 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基.
结论 数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集 W 是 V 的一个子空间 $\Leftrightarrow \forall a,b\in F,\alpha,\beta\in W,$ 都有 $a\alpha+b\beta\in W$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>本节主要讲述了线性子空间定义、判定；生成子空间和生成子空间相等定义；生成子空间的基与维数定理；子空间扩充基定理。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>思
考
与
练
习</td>
<td>1. 验证 6. 4 节练习题中的线性空间 $V=\left\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\middle|\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\right\}$ 的两个子集
$$V_1=\left\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2)\middle|\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\right\},V_2=\left\{(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\middle|\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\right\}$$
（$\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2$ 分别为 W_1,W_2 的零元）
都是 V 的子空间。
证明：首先，V 的零元 $(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2)\in V_1\cap V_2$ ，所以 V_1,V_2 都是 V 的非空子集；
其次，任取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2\in W_2,k,l\in P$ ，有
$$k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\beta}_1\in W_1,k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2\in W_2$$
因此有：
$$k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2)+l(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{0}_2)=(k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{0}_2)\in V_1,$$</td>
<td>此题加深学生对基变换与坐标变换的理解与灵活应用。</td>
</tr>
</table>

$$k\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+l\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)=\left(\boldsymbol{0}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2\right)\in V_2$$

所以V_1,V_2都是V 的子空间。

思考与练习

2.判断$\mathbf{R}^{2\times 3}$的下列子集是否构成$\mathbf{R}^{2\times 3}$的子空间，说明理由。

（1）$W_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & b & c\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$

（2）$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & c & 0\end{pmatrix} \middle| a+b+\mathrm{c}=0, a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$

强调证明步骤

解：（1）不构成。$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W_1$， 但

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\notin W_1$，所以$W_1$不是$\mathbf{R}^{2\times 3}$的子空间。

（2）构成。首先因为$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W_2$，所以$W_2$是$\mathbf{R}^{2\times 3}$的非空子集，

其次，任取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & 0\\ 0 & c_1 & 0\end{pmatrix}\in W_2,\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & 0\\ 0 & c_2 & 0\end{pmatrix}\in W_2$，有：

$$a_1+b_1+c_1=0, a_1,b_1,c_1\in\mathbf{R}，\ a_2+b_2+c_2=0, a_2,b_2,c_2\in\mathbf{R}$$

推出

$$\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)+\left(c_1+c_2\right)=0, a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2\in\mathbf{R}$$

因此有：
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & c_1+c_2 & 0\end{pmatrix}\in W_2.$$

对任意的$k\in\mathbf{R}$，有：$ka_1+kb_1+kc_1=0, ka_1,kb_1,kc_1\in\mathbf{R}$

所以：
$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_1 & kb_1 & 0\\ 0 & kc_1 & 0\end{pmatrix}\in W_2$$

因此W_2构成$\mathbf{R}^{2\times 3}$的子空间。

作业

P270
12、13、14、15、16、17。

巩固所学

阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。	
教学反思	1. 学生对子空间证明的第一步非空集合的说明，在线上证明中忽视了。**应对办法：**线下强调此步骤必不可少。 2.学银在线视频课中有一些好题可以在线下课上引用讲解。既丰富了线下教学内容，又对学生的线上学习起到了较好的总结作用。	

授课题目	§6.6　子空间的交与和	教学时数	4 学时
线上预习目标	1. 了解子空间的交运算 2. 了解交空间的并运算 3. 理解维数定理		
教学目标	掌握子空间的交与和的概念；掌握维数定理。		
思政目标	1. 培养学生严谨的“**科学精神**” 2. 将“集合的交与并”与“子空间的交与和”体现事物普遍联系的**哲学思想。**		
教学重点	子空间的交与和的概念与求法。		
教学难点	子空间的交与和的求法与证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时） 线上（1.6 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学 （线上学银在线预习微课+ 线上自制知识点总结微课+ 线上自制习题讲解微课+ 线下多媒体教学）

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 问题 1：子空间交与和的定义 问题 2：维数定理的内容及证明思路 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，

	教师：（线上教学总结） 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.子空间交与和的定义及求法 2.维数公式 3.子空间的并是子空间吗？ 由前面的学习可知子空间也是线性空间，且是线性空间的子集合。由集合的性质知，集合有两种运算，集合的交与集合的并。而子空间作为一种特殊的集合，它的运算都有哪些呢？答案是子空间的交与子空间的和。	检验预习效果 由熟悉的概念引入新课，温故知新
线下讲授新课	一、子空间的交 1、2 个子空间的交 定理 5 如果 V_1 , V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间. 证明：因为 $\theta \in W_1 \cap W_2$，所以 $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$．设 α ，$\beta \in W_1 \cap W_2$，则 α ，$\beta \in W_i$，$i=1$，2．因为 W_i 是子空间，所以 $\alpha+\beta \in W_i$；$k\alpha \in W_i$，$\forall k \in F$；$i=1,2$．于是 $\alpha+\beta \in W_1 \cap W_2$，$k\alpha \in W_1 \cap W_2$，$\forall k \in F$．因此，$W_1 \cap W_2$ 是 V 的子空间． 2、子空间的交满足的运算律 由集合的交的定义有，子空间的交适合下列运算规律： $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$（交换律），	通过与集合的交类比教学，体现**事物普遍联系**的哲学思想

线 下 讲 授 新 课	$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$（结合律）. 由结合律，可以定义多个子空间的交： $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcup_{i=1}^{s} V_i$， 它也是子空间. 二、子空间的和 1、2 个子空间的和 定义 8 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，所谓V_1与V_2的和，是指由所有能表示成$\alpha_1+\alpha_2$，而$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$的向量组成的子集合，记作$V_1+V_2$. 定理 6 如果$V_1, V_2$是线性空间$V$的子空间，那么它们的和$V_1+V_2$也是$V$的子空间. **证** 首先$V_1+V_2$显然是非空的集合。 其次在$V_1+V_2$中任取两个向量α，$\beta$，可设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\beta_2$， 其中α_1，$\beta_1 \in V_1$，α_2，$\beta_2 \in V_2$，则 $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)$. 由于$V_1, V_2$是线性空间$V$的子空间，所以$\alpha_1+\beta_1 \in V_1$，$\alpha_2+\beta_2 \in V_2$，从而$\alpha+\beta \in V_1+V_2$. 同样$k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1+V_2$. 因此$V_1+V_2$也是$V$的子空间. 由定义有，子空间的和适合下列运算规律： $V_1+V_2=V_2+V_1$（交换律）， $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$（结合律）. 2、多个子空间的和	交是线性子空间的运算，自然想到集合并的运算。但是作为线性子空间，集合的并不是其运算，而和才是线性子空间的运算。（最好举例说明并不是线性子空间运算）

	$$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i.$$ 它是由所有表示成 $$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\,,\alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$ 的向量组成的子空间.	
线下讲授新课	三、关于子空间的交与和有以下结论： 1. 设 V_1,V_2,W 都是子空间，那么由 $W\subset V_1$ 与 $W\subset V_2$ 可推出 $W\subset V_1\bigcap V_2$；而由 $W\supset V_1$ 与 $W\supset V_2$ 可推出 $W\supset V_1+V_2$. 2. 对于子空间 V_1 与 V_2，以下三个论断是等价的： 1）$V_1\subset V_2$; 2) $V_1\bigcap V_2=V_1$; 3) $V_1+V_2=V_2$. 例 1 在三维几何中用 V_1 表示一条通过原点的直线，V_2 表示一张通过原点而且与 V_1 垂直的平面，那么，V_1 与 V_2 的交是 $\{0\}$，而 V_1 与 V_2 的和是整个空间. 例 2 在线性空间 P^n 中，用 V_1 与 V_2 分别表示齐次方程组 $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$ 与 $$\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0,\\b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0\end{cases}$$ 的解空间，那么 $V_1\bigcap V_2$ 就是齐次方程组	例2将新旧知识联系，使得抽象概念更加具体化，体现**抽象与具体**关系

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \\
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0
\end{cases}
$$

的解空间.

例 3 在一个线性空间 V 中，有

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

新知扩展

关于两个子空间的交与和的维数，有以下定理.

定理 7（维数公式）若 W_1，W_2 是数域 F 上向量空间 V 的两个有限维子空间，则 $W_1 \cap W_2$ 与 W_1+W_2 也都是有限维的，并且

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2). \qquad (1)$$

证　因为 W_1 是有限维的，而 $W_1 \cap W_2$ 是 W_1 的子空间，所以 $W_1 \cap W_2$ 也是有限维的. 设 W_1,W_2 的维数分别是 n_1,n_2，$W_1 \cap W_2$ 的维数是 m. 取 $W_1 \cap W_2$ 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，并将它分别扩充成 W_1 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，$\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$，扩充成 W_2 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$. 我们有

$$W_1+W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ \beta_1,\cdots,\ \beta_{n_1-m})+L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ \gamma_1,\cdots,\ \gamma_{n_2-m})$$

$$=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ \beta_1,\cdots,\ \beta_{n_1-m},\ \gamma_1,\cdots,\ \gamma_{n_2-m}) \qquad (2)$$

于是 W_1+W_2 是有限维的. 若能证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，$\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$ 线性无关，则它就是 W_1+W_2 的一个基，从而有 $\dim(W_1+W_2)=m+(n_1-m)+(n_2-m)=n_1+n_2-m=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$，即维数公式成立.

于是，设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=\theta,$$

则 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$

维数公式的定理内容和证明过程都非常重要，要求学生必须理解证明思路及具体过程。

维数公式与集合的交与并公式联系，体现**事物普遍联系**的哲学思想

$$=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}\,. \qquad (3)$$

由(3)的第一个等式知道α ∈W$_1$，由第二个等式知道α ∈W$_2$．于是α ∈W$_1$∩W$_2$．因此α 可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出，令

$$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m\,. \qquad (4)$$

由(3)的第二式以及(4)式得

$$l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=\theta\,.$$

因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$， $\gamma_1,\cdots\gamma_{n_2-m}$线性无关，所以

$$l_1=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0\,.$$

从而α =θ ．再由(3)的第一式便得到

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=\theta\,.$$

因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$， $\beta_1,\cdots,$ β_{n_1-m}线性无关，所以

$$k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0\,,$$

这证明了$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$， $\beta_1,\cdots,$ β_{n_1-m}， $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$线性无关.

推论 如果n维线性空间V中两个子空间V_1，V_2的维数之和大于n，那么V_1， V_2必含有非零的公共向量.

小结

本节主要讲述了子空间的交与和；子空间的性质；维数公式.

思考与练习

1、设P^4的两个子空间$W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3)$，$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in P^4\mid x_1+2x_2-x_4=0\}$。求$W_1+W_2$与$W_1\bigcap W_2$的基与维数。

解： W_2恰好是$x_1+2x_2-x_4=0$的解空间，于是$x_1+2x_2-x_4=0$的任一基础解系都是W_2的一组基. 下面求$x_1+2x_2-x_4=0$的基础解系。

由$x_1+2x_2-x_4=0$， 推出$x_4=x_1+2x_2$，得到$x_1+2x_2-x_4=0$的

此题强化学生进行线性子空间的交与和运算的能力，锻炼学生的逻辑思维能力与运算能力

一个基础解系也是W_2的一组基：

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,1),\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0,2),\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1,0)$$

于是 $W_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，进而得 $W_1+W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的任一极大线性无关组都是$W_1+W_2$的一组基。 由于：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\alpha}_1' & \boldsymbol{\alpha}_2' & \boldsymbol{\beta}_1' & \boldsymbol{\beta}_2' & \boldsymbol{\beta}_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的一个极大线性无关组，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为$W_1+W_2$的一组基，推出$W_1+W_2$的维数为 4。

任取$\boldsymbol{\gamma}\in W_1\cap W_2$，则有：

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3 \qquad (5)$$

由式（5）得到齐次线性方程组：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',-\boldsymbol{\beta}_1',-\boldsymbol{\beta}_2',-\boldsymbol{\beta}_3')\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad (6)$$

齐次线性方程组式（6）的一般解为：

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}y_3 \\ x_2=\frac{1}{2}y_3 \\ y_1=0 \\ y_2=\frac{1}{2}y_3 \end{cases} \qquad (7)$$

式（7）中y_3为自由未知量，将式（7）代入式（5）中得：

	$$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{1}{2}y_3\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}y_3\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}y_3\left(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\frac{1}{2}y_3\left(0,1,2,2\right)$$ 所以$\left(0,1,2,2\right)$为$W_1\cap W_2$的一组基，$\dim\left(W_1\cap W_2\right)=1$。 注：$\boldsymbol{\gamma}=y_2\boldsymbol{\beta}_2+2y_2\boldsymbol{\beta}_3=y_2\left(\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3\right)=y_2\left(0,1,2,2\right)$。	
作业	P270. 18。	巩固所学
阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。	
教学反思	1.线下课部分学生有懈怠情绪，不积极思考。 应对办法：课上临时采用分组讨论，学生代表讲课加分的形式，调动了学生学习的积极性。还需要在以后的教学中采用更多的办法调动积极性。 2.学生对维数公式与中学的集合方面的类似公式没有很好联系思考。 应对办法：实例教学 3. 子空间的证明学生理解存在误区。 应对办法：提出方法 2，开始时学生把握不好，经过讲解，豁然开朗。	

授课题目	§6.7 子空间的直和	教学时数	3 学时
线上教学目标	1. 了解子空间直和的概念。 2. 了解子空间直和与和的区别 3. 了解子空间直和的等价条件		
教学目标	掌握直和的概念，深刻理解直和的充要条件。		
思政目标	1. 证明问题的训练培养了学生严谨的**科学精神** 2. 线下课堂讨论式教学培养学生的**团队意识**和**合作精神**		
教学重点	子空间的直和的概念和等价条件。		
教学难点	子空间的直和的证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.2 学时+1.8 学时） 线上（1.2 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）课后线上学习通自录微课：直和等价条件总结及证明方法解析 线下（1.8 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学 （线上学银在线预习微课+ 线上自制知识点总结微课+ 线上自制习题讲解微课+ 线下多媒体教学）

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。 7. 录制本节课重要知识点微课：子空间直和的等价条件总结和证明方法解析	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。 7. 本节课知识点抽象，不易于把握，通过总结微课的录制帮助学生在课后能够更好地复习。

线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.直和的定义 2.直和的定义及证明方法 由线性空间的维数公式维（V_1）+ 维（V_2）= 维（V_1+V_2）+ 维（$V_1\cap V_2$）可知，当$V_1\cap V_2=\{0\}$时，维数公式维（V_1）+ 维（V_2）= 维（V_1+V_2），称这样的子空间的和为直和。若能将一个线性空间分解成若干个子空间的直和，则整个线性空间的研究就归结为若干个较简单的子空间的研究，研究子空间的直和就是为了从分解线性空间的角度进一步研究其结构，直和分解使得线性空间变成若干个子空间的组合，降低了线性空间的维数。	从线性空间结构的角度引出线性子空间直和的内容，让学生从本质上认识研究线性子空间直和的意义。
线 下 讲 授 新 课	一、2 个子空间的直和 1、直和的定义 定义 9 设V_1,V_2是线性空间V 的子空间，如果和V_1+V_2中每个向量α的分解式 $$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$$ 是唯一的，这个和就称为直和，记为$V_1\oplus V_2$. 2、直和的判定 定理 8 和V_1+V_2是直和的充要条件是等式 $$\alpha_1+\alpha_2=0,\ \alpha_i\in V_i\ (i=1,\ 2)$$ 只有在α_i全为零时才成立. 证：定理的条件实际上就是：零向量的分解式是唯一的。为而这个条件显然是必要的。下面来证明这个条件的充分性。 设$\alpha=V_1+V_2$，设它有 2 个分解式 $$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\ \alpha_i,\beta_i\in V_i\,(i=1,2)$$ 于是$(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)=0$，其中$\alpha_i-\beta_i\in V_i\,(i=1,2)$。由定理的条	强调与和定义的区别

线下讲授新课

件应有$\alpha_i-\beta_i=0\ \alpha_i=\beta_i(i=1,2)$。因此零向量分解唯一。

推论 和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$.

证：先证条件的充分性。假设有等式

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\ \alpha_i\in V_i\,(i=1,2)$$

那么$\alpha_1=-\alpha_2\in V_1\cap V_2$。

由假设$\alpha_1=\alpha_2=0$。这就证明了V_1+V_2是直和。

再证必要性。任取向量$\alpha\in V_1\cap V_2$，于是零向量可以表成

$$\alpha+(-\alpha)=0,\ \alpha_i\in V_i\,(i=1,2)$$

因为是直和，所以$\alpha+(-\alpha)=0$。这就证明了$V_1\cap V_2=\{0\}$。

定理 9 设V_1,V_2是线性空间V的子空间，令$W=V_1+V_2$，则

$$W=V_1\oplus V_2\Leftrightarrow \text{维}(W)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2).$$

证：因为

$$\text{维}(W)+\text{维}(V_1\cap V_2)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2)$$

和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$，这与$\text{维}(V_1\cap V_2)=0$等价的，也就与$\text{维}(W)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2)$等价。

定理 10 设U是线性空间V的一个子空间，那么一定存在一个子空间W使$V=U\oplus W$.

证：取U的一组基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$，把它扩充为$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$。令$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，即$W$满足要求。

将一个线性空间分解成若干个子空间的直和，使维数较大的线性空间分解成维数较小的线性空间进行研究，降低线性空间的维数。

新 知 扩 展	子空间的直和的概念可以推广到多个子空间的情形. 定义 10 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间 V 的子空间，如果和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中每个向量 α 的分解式 $$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$ 是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$. 定理 11 设 W_1，W_2，…，W_s 是数域 F 上向量空间 V 的子空间，则下列命题彼此等价： 1)和 W_1，W_2，…，W_s 是直和； 2)和 $\sum_{i=1}^{s}W_i$ 中零向量的表法唯一； 3)$W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j=0$，$i$=1,2,⋯,$s$. **证** 1)⇒2) 显然. 2)⇒3) 任取 $\alpha\in W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j$，则－$\alpha\in W_i$ 且 $\alpha\in\sum_{j\neq i}W_j$. 于是 $\alpha=\sum_{j\neq i}\alpha_j$，其中 $\alpha_j\in W_j$. 因此零向量可以表成 $$\theta=(-\alpha)+\alpha=(-\alpha)+\sum_{j\neq i}\alpha_j$$ 故由 2)得－$\alpha=\theta$，所以 $\alpha=\theta$. 于是 $W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j=0$. 3) ⇒1) 任取 $\alpha\in\sum_{i=1}^{s}W_i$，假设 α 有两种表法： $$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\quad \alpha_i\in W_i\ (i=1,2,\cdots,s),$$ $$\alpha=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s,\quad \beta_i\in W_i\ (i=1,2,\cdots,s).$$ 任取 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$，由上两式可得 $$\beta_i-\alpha_i=\sum_{j\neq i}\left(\alpha_j-\beta_j\right)\in W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j$$ 因为 $W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j=0$，所以 $\beta_i-\alpha_i=\theta$，即 $\beta_i=\alpha_i$，i=1,2,⋯,s.	由基扩充定理可知，若一个线性空间有子空间，则线性空间可以看成是其子空间的扩张。若线性空间是若干个子空间的直和，则这些子空间就是线性空间的一种分解。
小 结	本节主要讲述了直和定义；直和的四个等价命题；线性空间子空间的直和分解；直和推广。	

<table>
<tr>
<td>思考与练习</td>
<td>1、设 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，$n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间分别为W_1,W_2，证明：$P^n=W_1\oplus W_2$。

证：设n元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解空间为$W$，则$W_1,W_2$与$W$都是$P^n$的子空间，且$W=W_1\bigcap W_2$，而因$\boldsymbol{A}$可逆，所以有$W=W_1\bigcap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$，推出$W_1+W_2=W_1\oplus W_2$，因此有$\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)$，而且$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}_1)+r(\boldsymbol{A}_2)=n$。

由于W_1，W_2皆为P^n的子空间，因此$W_1+W_2\subseteq P^n$，又因：
$\dim(W_1)=n-r(\boldsymbol{A}_1),\dim(W_2)=n-r(\boldsymbol{A}_2)=n-(n-r(\boldsymbol{A}_1))=r(\boldsymbol{A}_1)$

所以：$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)=n$，因此$P^n=W_1\oplus W_2$。

2：已知$V_1=\{\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}\,|\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'\}$是$P^{n\times n}$的子空间，求$P^{n\times n}$的子空间$V_2$使得$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$。

解： 令$V_2=\{\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}\,|\,\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'\}$，可验证$V_2$是$V$的子空间。任取$\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，有：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2}+\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2}$。

又 $\left(\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\right)'=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$ 推出 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\in V_1$，$\left(\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\right)'=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$ 推出 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\in V_2$，从而知$P^{n\times n}=V_1+V_2$。

任取$\boldsymbol{B}\in V_1\bigcap V_2$，有$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}$，推出$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，即$V_1\bigcap V_2=\{\boldsymbol{O}\}$，故$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$。</td>
<td>练习题在加深学生对直和分解问题证明过程的理解的同时，使得此概念更加具体化</td>
</tr>
<tr>
<td>作业</td>
<td>P270
19、20、21、22、23。</td>
<td>巩固所学</td>
</tr>
</table>

阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。	
教学反思	1. 学生通过预习视频课加深了对抽象内容的理解，效果明显好于传统教学。 2. 学生对多个线性空间的直和概念理解不好。 应对办法：多举例	

授课题目	**§6.8　线性空间的同构**	**教学时数**	2 学时
线上预习目标	1.　了解同构的定义 2.　了解同构的证明方法		
教学目标	深刻理解同构的概念。并掌握线性空间同构的充要条件。		
思政目标	**1.**　同构的概念教学体现“**透过现象看本质**“，培养学生**利用理性思维分析事物本质。** **2.**　分类思想体现“**物以类聚，人以群分**”，激励学生积极上进。 3.　证明问题的逻辑思维训练培养学生**严谨的科学精神**		
教学重点	线性空间的同构的概念。		
教学难点	线性空间的同构的证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时） 线上（0.8 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	**教学手段**	线上线下混合式教学（线上学银在线预习微课+线上自制知识点总结微课+线上自制习题讲解微课+线下多媒体教学）

教学过程		**设计意图**
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视

	教师：（线上教学总结） 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.同构的定义 2.同构的判定与证明 研究线性空间主要研究它的代数结构。前面从线性空间的向量之间关系及子空间的角度来进行讨论，而本节是以分类的思想，利用映射的方法从两个线性空间之间的联系来研究它的代数结构。本节内容具有将未知的有限维空间的研究转化为对已知的有限维空间来研究，并且对有限维线性空间进行分类研究。	将对未知的有限维空间的研究转化成对已知有限维空间进行研究，旨在提高学生理解的深度。
线下讲授新	设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，在这组基下，V 中每个向量都有确定的坐标，而向量的坐标可以看成 P^n 元素，因此向量与它的坐标之间的对应实质上就是 V 到 P^n 的一个映射.显然这个映射是单射与满射，换句话说，坐标给出了线性空间 V 与 P^n 的一个双射.这个对应的重要性表现在它与运算的关系上.设 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$， $\beta=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n$	

课 线 下 讲 授 新 课	而向量$\alpha,\beta,$的坐标分别是$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，那么 $\alpha+\beta=(a_1+b_1)\varepsilon_1+(a_2+b_2)\varepsilon_2+\cdots+(a_n+b_n)\varepsilon_n$; $k\alpha=ka_1\varepsilon_1+ka_2\varepsilon_2+\cdots+ka_n\varepsilon_n$. 于是向量$\alpha+\beta,\ k\alpha$的坐标分别是 $(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 以上的式子说明在向量用坐标表示之后，它们的运算就可以归结为它们坐标的运算.因而线性空间V的讨论也就可以归结为P^n的讨论. 定义 11　数域P上两个线性空间V与V'称为同构的，如果由V到V'有一个双射σ，具有以下性质： 1）$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$. 其中$\alpha,\beta$是$V$中任意向量，$k$是$P$中任意数.这样的映射$\sigma$称为同构映射. 前面的讨论说明在$n$维线性空间$V$中取定一组基后，向量与它的坐标之间的对应就是$V$到$P^n$的一个同构映射.因而，数域$P$上任一个$n$维线性空间都与$P^n$同构. 由定义可以看出，同构映射具有下列性质： 1. $\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$. 2. $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$. 3. V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关$\Leftrightarrow$它们的象$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关. 因为维数就是空间中线性无关向量的最大个数，所以由同构映射的性质可以推知，同构的线性空间有相同的维数.	空间抽象的讨论中，没有考虑线性空间内的元素是什么，没有考虑运算是如何定义的，只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质。从这个观点讲，同构就是有相同的代数结构或者相同的构造，因此同构的线性空间可以不加以区别，只研究其中线性空间的一个代数性质，便可以得到与其同构的同构空间的性质。 **思政：** **体现“透过现象看本质”，培养学生的理性思维。**

	4. 如果V_1是V的一个线性子空间，那么，V_1在σ下的象集合 $$\sigma(V_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V_1\}$$ 是$\sigma(V)$的子空间，并且V_1与$\sigma(V_1)$维数相同. 5. 同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.	
新知扩展	同构作为线性空间之间的一种关系，具有反身性、对称性与传递性. 既然数域P上任意一个n维线性空间都与P^n同构，由同构的对称性与传递性即得，数域P上任意两个n维线性空间都同构. 定理 12 数域P上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数. 由线性空间的抽象讨论中，并没有考虑线性空间的元素是什么，也没有考虑其中运算是怎样定义的，而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质.从这个观点看来，同构的线性空间是可以不加区别的.因之，定理 12 说明了，维数是有限维线性空间的唯一的本质特征.	揭示概念本质 **思政**： 用维数给线性空间分类，体现“**物以类聚，人以群分**”的思想，激励学生积极上进。
小结	本节主要讲述了同构的定义；同构的性质；同构维数定理.	
思考与练习	1、考虑 6.4 节练习题中的线性空间 $V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$（$W_1,W_2$都是数域$P$上的线性空间） 的两个子空间$V_1=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\},V_2=\{(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$（$\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2$分别为$W_1,W_2$的零元）。（1）证明$V_i$与$W_i(i=1,2)$同构；（2）设$\dim W_1=m,\dim W_2=n$，求$\dim V$。 （1）证：定义映射：$\varphi_i:V_i\to W_i\,(i=1,2)$如下 $$\varphi_1:(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2)\mapsto\boldsymbol{\alpha}_1,\forall\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1$$ $$\varphi_2:(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mapsto\boldsymbol{\alpha}_2,\forall\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2$$ 则$\varphi_i:V_i\to W_i\,(i=1,2)$是双射，且任取$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\in W_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2\in W_2$，$k,l\in P$： $$\varphi_1((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{0}_2))=\varphi_1((\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{0}_2))=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1=\varphi_1((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2))+\varphi_1((\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{0}_2))$$	练习题加深学生对同构思想的理解，体会用已知有限维空间的研究替代对未知的有限维空间的研究的意义。

	$\varphi_1\left(k\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2\right)\right)=\varphi_1\left(\left(k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2\right)\right)=k\boldsymbol{\alpha}_1=k\varphi_1\left(\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0}_2\right)\right)$ $\varphi_2\left(k\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+l\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)=\varphi_2\left(\left(\boldsymbol{0}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)$ $=k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2=k\varphi_2\left(\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)+l\varphi_2\left(\left(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)$ 因此$\varphi_i:V_i\to W_i$是V_i到$W_i\left(i=1,2\right)$的同构映射，所以V_1与W_1同构,V_2与W_2同构。 （2）解：因$\varphi_i:V_i\to W_i$是V_i到$W_i\left(i=1,2\right)$的同构映射，由同构映射的性质知$\dim\left(V_1\right)=\dim\left(W_1\right),\dim\left(V_2\right)=\dim\left(W_2\right)$，又知$V=V_1\oplus V_2$，因此有： $\dim\left(V\right)=\dim\left(V_1\right)+\dim\left(V_2\right)=\dim\left(W_1\right)+\dim\left(W_2\right)=m+n$。 2、设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，证明：由$\boldsymbol{A}$的全体实系数多项式构成的集合$V$关于矩阵的加法与数乘运算构成的$\mathbf{R}$上的线性空间与复数域$\mathbf{C}$作为$\mathbf{R}$上的线性空间同构。 证：因$\mathbf{C}$作为$\mathbf{R}$上的线性空间其维数为 2，所以只需说明$\dim V=2$。 由题设知：$V=\{f(\boldsymbol{A})\mid f\left(x\right)\in\mathbf{R}\left[x\right]\}$，又$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，得： $\boldsymbol{A}^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}$ 因此$V=\{a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_2\mid a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$，知$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}$是$V$的一组生成元，又：如果： $k\boldsymbol{E}_2+l\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&-l\\l&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 那么有$k=l=0$，所以$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}$线性无关，知$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}$是$V$的一组基，故$V$是$\mathbf{R}$上的 2 维线性空间，而$\mathbf{C}$也是$\mathbf{R}$上的 2 维线性空间，所以$V$与$\mathbf{C}$同构。 3、 令$V=P\left[x\right]_4$，$W=P^4$，求映射$\sigma:V\to W$，使得$V\cong W$。	通过综合练习，将本节课知识与前面知识联系，温故知新

	解：$\forall g(x)\in P[x]_4$，$g(x)$ 都可以写成 $P[x]_4$ 的基 $1,x,x^2,x^3$ 的唯一线性组合： $$g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3,$$ $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in P^4$ 是 $g(x)$ 在基 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标，从而就建立了 $$V=P[x]_4 \text{ 到 } W=P^4$$ 的双射：$\sigma: g(x)\mapsto (a_1,a_2,a_3,a_4)$ 满足：对 $\forall g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$， $$h(x)=b_1+b_2x+b_3x^2+b_4x^3\in P[x]_4:$$ $$\sigma(g(x)+h(x))=\sigma(g(x))+\sigma(h(x))$$ 对 $\forall a\in P$ $$\sigma(ag(x))=a\sigma(g(x))$$ 于是 σ 是 $V=P[x]_4$ 到 $W=P^4$ 的同构映射，所以 $V\cong W$。	
作业	P269 11。	巩固所学
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社。	
教学反思	1.证明是学生的弱项 **应对办法：**加强证明过程的分析和讲解，加强训练 2.线上视频课的学习起到很好的加深理解的作用。	

授课题目	7.1 线性变换的定义	教学时数	2 学时
线上预习目标	1. 了解线性变换的定义 2. 了解线性变换的性质		
教学目标	掌握线性变换的定义及线性变换的性质。		
思政目标	1. 通过类比教学激励学生**勤奋学习，报效祖国** 2. 线性变换与映射的定义的区别与联系体现“**事物普遍联系**”的哲学思想		
教学重点	线性变换的概念.		
教学难点	线性变换的判定及证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时） 线上（0.8 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）完成作业后，学习学习通的作业题微课（自制） 线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学

<table>
<tr><th colspan="2">教学过程</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>线
上
教
学
过
程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。

学生：（线上学习内容）
3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题

教师：（线上教学总结）
5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。

5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
<tr><td>线
下
课
程
导
入</td><td>提问学生：通过线上预习，有哪些收获？
1.线性变换的定义
2.判定方法
上一章我们看到，数域 P 上任意一个 n 维线性空间都与 Pn 同构，因之，有限维线性空间的结构可以认为是完全清楚了．线性空间是某一类事物从量的方面的一个抽象．认识客观事物，固然要弄清它们单个的和总体的性质，但是更重要的是研究它们之间的各种各样的联系．在线性空间中，事物之间的联系就反映为线性空间的映射．线性空间 V 到自身的映射通常称为 V 的一个变换．线性变换是最简单的，同时也可以认为是最基本的一种变换，正如线性函数是最简单的和最基本的函数一样．线性变换是线性代数的一个主要研究对象．在本章将会看到，当所考虑的线性空间是有限维时，线性变换和矩阵间有很自然的联系，因此在讨论线性变换时，要常用到矩阵这个工具．</td><td></td></tr>
</table>

线下讲授新课

一、线性变换的定义

线性空间V到自身的映射称为V的一个变换.

定义 1 线性空间V的一个变换$\mathscr{A}$称为线性变换，如果对于V中任意的元素α,β和数域P中任意数k，都有

$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$;

$\mathscr{A}(k\alpha)=\mathscr{A}k(\alpha)$. （1）

一般用花体拉丁字母$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，…表示V的线性变换，$\mathscr{A}(\alpha)$或$\mathscr{A}\alpha$代表元素α在变换$\mathscr{A}$下的像.

定义中等式(1)所表示的性质，有时也说成线性变换保持向量的加法与数量乘法.

例 1. 平面上的向量构成实数域上的二维线性空间.把平面围绕坐标原点按反时钟方向旋转θ角，就是一个线性变换，用$\mathscr{J}_\theta$表示.如果平面上一个向量α在直角坐标系下的坐标是(x,y)，那么像$\mathscr{J}_\theta(\alpha)$的坐标，即$\alpha$旋转$\theta$角之后的坐标$(x',y')$是按照公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

来计算的. 同样空间中绕轴的旋转也是一个线性变换.

例 2 设α是几何空间中一固定非零向量，把每个向量ξ变到它在α上的内射影的变换也是一个线性变换，以$\prod_\alpha$表示它.用公式表示就是

$$\prod\nolimits_\alpha(\xi)=\frac{(\alpha,\xi)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

这里$(\alpha,\xi),(\alpha,\alpha)$表示内积.

二、线性变换的简单性质：

思政：

将线性变换对线性空间元素的作用类比大学教育对学生个体的影响，激励学生勤奋学习，练好本领。

线性变换就好比一所大学，学生就好比向量，线性变换对向量的作用就好比大学对学生的培养和学生自身努力，毕业时的样子就可看作线性变换作用得到的像。

用线性变换作用向量α的常数倍k，正数k表示正能量，负数k表示负能量，k就好比学生的努力程

1. 设 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换，则 $\mathscr{A}(0)=0,\ \mathscr{A}(-\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha)$.

2. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变.换句话说，如果 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,$$

那么经过线性变换 $\mathscr{A}$ 之后，$\mathscr{A}(\beta)$ 是 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\ldots,\mathscr{A}(\alpha_r)$ 同样的线性组合：

$$\mathscr{A}(\beta)=k_1\mathscr{A}(\alpha_1)+k_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\ldots+k_r\mathscr{A}(\alpha_r)$$

又如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 之间有一线性关系式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

那么它们的像之间也有同样的关系式

$$k_1\mathscr{A}(\alpha_1)+k_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\ldots+k_r\mathscr{A}(\alpha_r)=0.$$

3. 线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

注意3）的逆是不对的，线性变换可能把线性无关的向量组也变成线性相关的向量组．例如零变换就是这样.

度。

当 k 为正数时，看作学生很努力，线性变换作用于一个向量的正常数倍，则像也为向量的正常数倍，即 A（kα）=kA 意为学生成为人才。

当 k 为负数时，看作学生不努力，线性变换作用于一个向量的负常数倍，则像也为向量的负常数倍，意为学生不能成为人才。

因此，我们青年学生，在平时的学习中要用勤奋的汗水，浇灌出属于自己的成功之花。

<table>
<tr><td>新
知
扩
展</td><td>1．线性空间V中的恒等变换或称单位变换$\mathcal{E}$，即
$$\mathcal{E}(\alpha)=\alpha \qquad (\alpha\in V)$$
以及零变换$\mathcal{O}$，即
$$\mathcal{O}(\alpha)=0 \quad (\alpha\in V)$$
都是线性变换.
2．设V是数域P上的线性空间，k是P中的某个数，定义V的变换如下：
$$\alpha\to k\alpha, \qquad \alpha\in V.$$
这是一个线性变换，称为由数k决定的数乘变换，可用$\mathcal{K}$表示. 显然当$k=1$时，便得恒等变换，当$k=0$时，便得零变换.</td><td></td></tr>
<tr><td>小
结</td><td>本节需要掌握线性变换的定义及线性变换的性质。会判定映射是否是线性变换。会证明映射是线性变换。</td><td></td></tr>
<tr><td>思
考
与
练
习</td><td>1.在线性空间$P[x]$或者$P[x]_n$中，求微商是一个线性变换. 这个变换通常用$\mathcal{D}$代表，即
$$\mathcal{D}(f(x))=f'(x).$$
2. 定义在闭区间$[a,b]$上的全体连续函数组成实数域上一线性空间，以$C(a,b)$代表.在这个空间中变换
$$\mathcal{J}(f(x))=\int_a^x f(t)dt$$
是一线性变换.</td><td></td></tr>
</table>

作业	教材 317-1	巩固所学
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	本节课线上预习完成率较高，课堂学生学习反馈效果较好，线上课前预习有重要意义，仍要抓紧不松懈。	

授课题目	7.2 线性变换的运算	**教学时数**	2 学时
线上预习目标	了解线性变换的运算方法		
教学目标	掌握线性变换的四种运算，即加法运算、数乘运算、乘法运算、可逆线性变换		
思政目标	1. 培养学生**严谨的科学精神** 培养学生的**团队意识**和**合作精神** 2. 概念类比教学体现**事物普遍联系**的哲学思想		
教学重点	线性变换的运算		
教学难点	乘法运算、可逆线性变换		
教学方法	线上线下混合式教学（0.8 学时 +1.2 学时） 线上（0.8 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	**教学手段**	线上线下混合式教学

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">教学过程</td><td colspan="2">设计意图</td></tr>
<tr><td>线
上
教
学
过
程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。

学生：（线上学习内容）
3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题

教师：（线上教学总结）
5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td colspan="2">1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。

5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>线下课程导入</td><td>

提问学生：通过线上预习，有哪些收获？

线性变换的运算的定义

复习线性变换的定义：　线性空间V的一个变换 $\mathcal{A}$ 称为线性变换，如果对于V中任意的元素α,β和数域P中任意数k，都有

$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)$;

$\mathcal{A}(k\alpha)=\mathcal{A}k(\alpha)$.

</td><td>检验预习效果</td></tr>
<tr><td>线下讲授新课</td><td>

一、线性变换的乘法

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是线性空间V的两个线性变换，定义它们的乘积为.

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha)=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) \qquad (\alpha\in V).$$

则线性变换的乘积也是线性变换.

线性变换的乘法适合结合律，即

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

但线性变换的乘法不适合交换律.例如，在实数域上的线性空间中，线性变换

$$\mathcal{D}(f(x))=f'(x).$$

$$\mathcal{J}(f(x))=\int_a^x f(t)dt$$

的乘积 $\mathcal{D}\mathcal{J}=\mathcal{E}$，但一般 $\mathcal{J}\mathcal{D}\neq\mathcal{E}$.

对于任意线性变换 $\mathcal{A}$，都有

$$\mathcal{A}\mathcal{E}=\mathcal{E}\mathcal{A}=\mathcal{A}.$$

</td><td>与函数的复合方法一致，体现“**事物普遍联系**”的观点</td></tr>
</table>

线下讲授新课

二、线性变换的加法

设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是线性空间V的两个线性变换，定义它们的和 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 为

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{B}(\alpha) \qquad (\alpha\in V).$$

则线性变换的和还是线性变换.

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha+\beta) &= \mathscr{A}(\alpha+\beta)+\mathscr{B}(\alpha+\beta)\\ &= (\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)) + (\mathscr{B}(\alpha)+\mathscr{B}(\beta))\\ &= (\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{B}(\alpha)) + (\mathscr{A}(\beta)+\mathscr{B}(\beta))\\ &= (\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha)+(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(k\alpha) &= \mathscr{A}(k\alpha)+\mathscr{B}(k\alpha)\\ &= k\,\mathscr{A}(\alpha)+k\,\mathscr{B}(\alpha) = (\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{B}(\alpha))\\ &= k\,(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha)\end{aligned}$$

线性变换的加法适合结合律与交换律，即

$$\mathscr{A}+(\mathscr{B}+\mathscr{C})=(\mathscr{A}+\mathscr{B})+\mathscr{C}.$$

$$\mathscr{A}+\mathscr{B}=\mathscr{B}+\mathscr{A}.$$

对于加法，零变换 $\mathscr{O}$ 与所有线性变换 $\mathscr{A}$ 的和仍等于 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}+\mathscr{O}=\mathscr{A}.$$

对于每个线性变换 $\mathscr{A}$，可以定义它的负变换（$-\mathscr{A}$）:

$$(-\mathscr{A})(\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha) \qquad (\alpha\in V).$$

则负变换（$-\mathscr{A}$）也是线性变换，且

$$\mathscr{A}+(-\mathscr{A})=\mathscr{O}.$$

线性变换的乘法对加法有左右分配律，即

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C})=\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C},$$

此部分内容非常简单，安排学生讲解，加深理解，激发学习的主观能动性。

线下讲授新课

$$(\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{A}.$$

三、线性变换的数量乘法

数域P中的数与线性变换$\mathcal{A}$的数量乘法定义为

$$k\mathcal{A}=\mathcal{K}\mathcal{A}$$

即

$$k\mathcal{A}(\alpha)=\mathcal{K}(\mathcal{A}(\alpha))=\mathcal{K}\mathcal{A}(\alpha),$$

当然$\mathcal{A}$还是线性变换.线性变换的数量乘法适合以下的规律：

$$(kl)\mathcal{A}=k(l\mathcal{A}),$$

$$(k+l)\mathcal{A}=k\mathcal{A}+l\mathcal{A},$$

$$k(\mathcal{A}+\mathcal{B})=k\mathcal{A}+k\mathcal{B},$$

$$1\mathcal{A}=\mathcal{A}.$$

线性空间V上全体线性变换，对于如上定义的加法与数量乘法，也构成数域P上一个线性空间.

V的变换$\mathcal{A}$称为可逆的，如果有V的变换$\mathcal{B}$存在，使

$$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}.$$

这时，变换$\mathcal{B}$称为$\mathcal{A}$的逆变换，记为$\mathcal{A}^{-1}$.如果线性变换$\mathcal{A}$是可逆的，那么它的逆变换$\mathcal{A}^{-1}$也是线性变换.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1}(\alpha+\beta)&=\mathcal{A}^{-1}[(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\alpha)+(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\beta)]\\&=\mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha))+\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\beta))]\\&=\mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta))]\\&=(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta))\\&=\mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta)\end{aligned}$$

线下讲授新课

$$\mathcal{A}^{-1}(k\alpha)=\mathcal{A}^{-1}(k\ (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\alpha))=\mathcal{A}^{-1}(k\ (\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1})(\alpha)))$$

$$=\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(k\mathcal{A}^{-1})(\alpha)))=(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(k\mathcal{A}^{-1}(\alpha))$$

$$=k\mathcal{A}^{-1}(\alpha)$$

既然线性变换的乘法满足结合律，当若干个线性变换 $\mathcal{A}$ 重复相乘时，其最终结果是完全确定的，与乘法的结合方法无关. 因此当 n 个（ n 是正整数）线性变换 $\mathcal{A}$ 相乘时，就可以用

$$\overbrace{AA\cdots A}^{n个}$$

来表示，称为 $\mathcal{A}$ 的 n 次幂，简记为 $\mathcal{A}^n$.作为定义，令

$$\mathcal{A}^0=\mathcal{E}.$$

根据线性变换幂的定义，可以推出指数法则：

$$\mathcal{A}^{m+n}=\mathcal{A}^m\mathcal{A}^n,(\mathcal{A}^m)^n=\mathcal{A}^{mn}\ (m,n\geq 0)$$

当线性变换 $\mathcal{A}$ 可逆时，定义 $\mathcal{A}$ 的负整数幂为

$$\mathcal{A}^{-n}=(\mathcal{A}^{-1})^n\ (n\text{ 是正整数}).$$

值得注意的是，线性变换乘积的指数法则不成立，即一般说来

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^n\neq\mathcal{A}^n\mathcal{B}^n.$$

设

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$$

是 $P[x]$ 中一多项式，$\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换，定义

$$f(\mathcal{A})=a_m\mathcal{A}^m+a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}+\cdots+a_0\mathcal{E}$$

显然 $f(\mathcal{A})$ 是一线性变换，它称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的多项式.

不难验证，如果在 $P[x]$ 中

$$h(x)=f(x)+g(x)\ ,p(x)=f(x)g(x),$$

那么

$$h(\mathcal{A})=f(\mathcal{A})+g(\mathcal{A}),\quad p(\mathcal{A})=f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}).$$

特别地，

$$f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=g(\mathcal{A})f(\mathcal{A}).$$

即同一个线性变换的多项式的乘法是可交换的.

例 1 在三维几何空间中，对于某一向量α的内射影$\prod_\alpha$是一个线性变换. $\prod_\alpha$可以用下面的公式来表示：

$$\prod_\alpha(\xi)=\frac{(\alpha,\xi)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

其中$(\alpha,\xi),(\alpha,\alpha)$表示向量的内积.

从图 2 不难看出，ζ在以α为法向量的平面x上的内射影$\prod_x(\zeta)$可以用公式

$$\prod_x(\zeta)=\zeta-\prod_\alpha(\zeta)$$

表示. 因此

$$\prod_x=\mathcal{E}-\prod_\alpha.$$

这里$\mathcal{E}$是恒等变换.

ζ对于平面x的反射$\mathcal{R}_x$也是一个线性变换，它的像由公式

$$\mathcal{R}_x(\zeta)=\zeta-2\prod_\alpha(\zeta)$$

给出. 因此

$$\mathcal{R}_x=\mathcal{E}-2\prod_\alpha.$$

设α,β是空间的两个向量. 显然，α与β互相垂直的充要条件为

$$\prod_\alpha\cdot\prod_\beta=o$$

新知扩展	在线性空间 $P[\lambda]_n$ 中，求微商是一个线性变换，用 $\mathcal{D}$ 表示.显然有 $$\mathcal{D}^n = O.$$ 其次，变换的平移 $$f(\lambda) \to f(\lambda + a) \quad a \in P$$ 也是一个线性变换，用 $\mathcal{S}_a$ 表示. 根据泰勒展开式 $$f(\lambda + a) = f(\lambda) + af'(\lambda) + \frac{a^2}{2!} f''(\lambda) + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda),$$ 因之 $\mathcal{S}_a$ 实质上是$\mathcal{D}$的多项式：	
小结	本节内容分为下面四个问题讲： 1. 加法运算 2. 数乘运算 3. 乘法运算 (1). 乘法运算 (2). 线性变换σ的方幂 4. 可逆线性变换及线性变换可逆的充要条件	
思考与练习	线性变换的乘法的应用是什么？自学学习通自制应用类微课：线性变换在飞机转动中的应用，回答问题：线性变换在飞机转动中是如何应用的？	
作业	教材 317：3-6	巩固所学

阅读文献	1. 张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2. 王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3. 田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	本节证明较为简单，采用让学生自主证明的方式教学，取得了良好的教学效果。	

4f

<table>
<tr><td>授课题目</td><td>7.3 线性变换的矩阵</td><td>教学时数</td><td>4 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="3">1. 了解线性变换矩阵的定义
2. 了解线性变换矩阵的作用</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="3">本节需掌握线性变换 A 关于基的矩阵及可逆线性变换的逆变换的矩阵，向量ξ与 A(ξ)关于同一个基的坐标之间的关系，同一个线性变换在不同基下的矩阵之间的关系</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="3">1.通过“线性变换的矩阵在飞机转动中的应用”线上自制案例式教学微课渗透航天精神，培养学生勇攀科技高峰的科学精神、爱国情怀、民族自豪感
2.线性变换与矩阵的联系体现“抽象与具体”的辩证关系。
3.相似矩阵的性质体现“形变质不变”的哲学思想</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="3">线性变换与其矩阵的关系、线性变换及其运算的矩阵表示。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="3">线性变换在给定基下的矩阵的求法、同一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时）
线上（1.6 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3)学生线上自主学习学习通“线性变换在飞机转动中的应用”（教师自制，教学设计见下篇）。
（4)学生线上自主学习学习通“线性变换在图形学中的应用”（教学自制，教学设计见下篇）。
线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td>线上线下混合式教学、线上工科应用案例教学、线上几何案例教学</td></tr>
</table>

	教学过程	设计意图
线 上 教 学 过 程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 5. 学生学习学习通的应用案例微课（自制） **教师：（线上教学总结）** 6. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 7. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。 **教师：（线上应用案例教学）** **8. 录制本节课知识点的工科应用案例微课，上传学习通。** **9. 录制本节课知识点的几何应用案例微课，上传学习通。**	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 6、7. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。 **5.8. 9、线上应用案例微课教学采用 Matlab 软件模拟飞机转动，培养学生的科研能力、探索精神，达成思政目标。**

线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.线性变换的矩阵的定义 2.线性变换的矩阵的用途 3.线性变换在不同基底下的坐标关系 线性空间的基底不唯一，一个线性变换在不同	检验预习效果
线 下 讲 授 新 课	**一 、线性变换关于基的矩阵** 设V是数域P上n维线性空间.$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ V的一组基，现在建立线性变换与矩阵关系. 空间V中任意一个向量ξ可以被基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表出，即有关系式 $$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \qquad (1)$$ 其中系数是唯一确定的，它们就是ξ在这组基下的坐标. 由于线性变换保持线性关系不变，因而在ξ的像$\mathcal{A}\xi$与基的像$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$之间也必然有相同的关系： $\mathcal{A}\xi=\mathcal{A}(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n)$ $=x_1\mathcal{A}(\varepsilon_1)+x_2\mathcal{A}(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\mathcal{A}(\varepsilon_n) \qquad (2)$ 上式表明，如果知道了基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的像，那么线性空间中	

任意一个向量ξ的像也就知道了，或者说

1. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基，如果线性变换 Å 与 $\mathcal{B}$ 在这组基上的作用相同，即

$$\mathcal{A}\varepsilon_i=\mathcal{B}\varepsilon_i,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

那么 $\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

将定理 1 内容拆开讲解，有利于理解。

证明 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 相等的意义是它们对每个向量的作用相同.因此，我们就是要证明对任一向量 ξ，等式 $\mathcal{A}\xi=\mathcal{B}\xi$ 成立，而由（2）及假设，即得$\mathcal{A}\xi=x_1\mathcal{A}(\varepsilon_1)+x_2\mathcal{A}(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\mathcal{A}(\varepsilon_n)$

$$=x_1\mathcal{B}(\varepsilon_1)+x_2\mathcal{B}(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\mathcal{B}(\varepsilon_n)$$

结论 1 的意义就是，一个线性变换完全被它在一组基上的作用所决定. 下面指出，基向量的像却完全可以是任意的，也就是

2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基，对于任意一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$一定有一个线性变换 Å 使

$$\mathcal{A}\varepsilon_i=\alpha_i\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

证明 我们来作出所要的线性变换，设

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i$$

是线性空间 V 中的任意一个向量，我们定义 V 的变换

$\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$

下面来证明变换 A 是线性的。

在 V 中任取两个向量 $\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i\quad\gamma=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i$

于是 $\beta+\gamma=\sum_{i=1}^{n}(c_i+b_i)\varepsilon_i$

$$k\beta=\sum_{i=1}^{n}kb_i\varepsilon_i \quad , \quad k\in P$$

按所定义的 A 的表达式（4），有

$$\mathrm{A}(\beta+\gamma)=\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i=A\beta+A\gamma$$

$$A(k\beta)=\sum_{i=1}^{n}kb_i\alpha_i=k\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha=kA\beta$$

因此 A 是线性变换，再来证 A 满足（3）式。因为

$$\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots0\varepsilon_{i-1}+1\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n, i=1,2\cdots n$$

所以

$$A\varepsilon_i=0\alpha_1+\cdots0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_n=\alpha_i, i=1,2\cdots n$$

定理 1 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中任意 n 个向量.存在唯一的线性变换 Å 使

$$\mathcal{A}\varepsilon_i=\alpha_i \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

定义 2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V 中的一个线性变换.基向量的像可以被基线性表出：

$$\begin{cases}A\varepsilon_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\ ,\\ A\varepsilon_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\ ,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A\varepsilon_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\ .\end{cases}$$

用矩阵表示就是

$\mathcal{A}$（$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$）=（$\mathcal{A}(\varepsilon_1)$，$\mathcal{A}$Å$(\varepsilon_2)$，…， $\mathcal{A}(\varepsilon_n)$）

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \qquad (5)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵A称为线性变换$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵.

例 1 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$是$n$ $(n>m)$维线性空间V的子空间W的一组基，把它扩充为V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.指定线性变换$\mathcal{A}$如下

$$\begin{cases} A\varepsilon_i=\varepsilon_i\,,i=1\,,2\,,\cdots,m, \\ A\varepsilon_i=0\,,\,i=m+1,\cdots,n. \end{cases}$$

如此确定的线性变换$\mathcal{A}$称为子空间W的一个投影. 不难证明

$$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$$

投影$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

这样，在取定一组基之后，就建立了由数域P上的n维线性空间V的线性变换到数域P上的$n\times n$矩阵的一个映射.前面结论 1 说明这个映射是单射，结论 2 说明这个映射是满射.换句话说，在这二者之间建立了一个双射.这个对应的重要性表现在它保持运算，即有

定理 2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是数域$P$上$n$维线性空间$V$的一组基，在这组基下，每个线性变换按公式（5）对应一个$n\times n$矩阵，这个对应具有以下性质：

1）线性变换的和对应于矩阵的和；

2）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；

3）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积；

4）可逆的线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应于逆矩阵. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$

证明 设 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是两个线性变换，它们在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵分别是 A,B，即

$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$ A

$\mathcal{B}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$ B

1）由（$\mathcal{A}$+$\mathcal{B}$）$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$

$=\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)+\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$

$=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\,A+(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\,B$

$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)(A+B)$

可知，在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下，线性变换 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 的矩阵是 A+B

2）相仿地

$(\mathcal{A}\mathcal{B})\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$

$=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n))$

$=\mathcal{A}((\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\,B)$

$=(\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n))B$

$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)AB$

因此，在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下，线性变换 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 的矩阵是 AB

3）因为

$(k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots k\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)kE$

所以数乘变换 $\mathcal{K}$ 在任何一组基下都对应于数量矩阵 kE. 由此可

知，数量乘积 k$\mathcal{A}$ 对应于矩阵的数量乘积 kA

4) 单位变换 $\mathcal{E}$ 对应于单位矩阵,因之等式

$$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$$

与等式

$$AB=BA=E$$

想对应，从而可逆线性变换与可逆矩阵对应，而且逆变换与逆矩阵对应

定理 2 明数域P上n维线性空间V的全体线性变换组成的集合$L(V)$对于线性变换的加法与数量乘法构成P上一个线性空间，与数域P上n级方阵构成的线性空间$P^{n\times n}$同构.

定理 3 设线性变换$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是$A$，向量$\xi$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则$\mathcal{A}\xi$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$可以按公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

计算.

证明 由假设

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{A}\xi=(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots A\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

另一方面，由假设

$$\mathcal{A}\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

由于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，所以

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

二、同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系.

线性变换的矩阵是与空间中一组基联系在一起的.一般说来，随着基的改变，同一个线性变换就有不同的矩阵.为了利用矩阵来研究线性变换，有必要弄清楚线性变换的矩阵是如何随着基的改变而改变的.

定理 4 设线性空间V中线性变换$\mathcal{A}$在两组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n, \tag{6}$$

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n \tag{7}$$

下的矩阵分别为A和B从基（6）到（7）的过渡矩阵是X，于是$B=X^{-1}AX$.

证明 已知

$$(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots A\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\mathrm{A}$$

$$(A\eta_1,A\eta_2,\cdots,A\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B$$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)X$$

于是

$$(\mathcal{A}\eta_1,\mathcal{A}\eta_2,\cdots,\mathcal{A}\eta_n)$$

$$=\mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=\mathcal{A}\left[(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)X\right]$$

$$=\left[\mathcal{A}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)X\right]=(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots\mathcal{A}\varepsilon_n)X$$

$$=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)AX=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X^{-1}AX$$

由此可得

$$B=X^{-1}AX$$

定理 4 告诉我们，同一个线性变换 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵之间的关系.

定义 3 设 A，B 为数域 P 上两个 n 级方阵，如果可以找到数域 P 上的 n 级可逆方阵 X，使得 $B=X^{-1}AX$，就说 A 相似于 B，记作 $A\sim B$.

相似是矩阵之间的一种关系，这种关系具有下面三个性质：

1. 反身性：$A\sim A$
2. 对称性：如果 $A\sim B$，那么 $B\sim A$.
3. 传递性：如果 $A\sim B$, $B\sim C$,那么 $A\sim C$.

定理 5 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的；反过来，如果两个矩阵相似，那么它们可以看作同一个线性变换在两组基下所对应的矩阵.

矩阵的相似对于运算有下面的性质.

如果 $B_1=X^{-1}A_1X$, $B_2=X^{-1}A_2X$，那么

$$B_1+B_2=X^{-1}(A_1+A_2)X,$$

$$B_1B_2=X^{-1}(A_1A_2)X$$

	由此可知，如果 $B=X^{-1}AX$，且 $f(x)$ 是数域 P 上一多项式，那么 $$f(B)=X^{-1}f(A)X$$ 利用矩阵相似的这个性质可以简化矩阵的计算.	
新知扩展	设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 $n\ (n>m)$ 维线性空间 V 的子空间 W 的一组基，把它扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.指定线性变换 $\mathcal{A}$ 如下 $$\begin{cases}A\varepsilon_i=\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,m,\\A\varepsilon_i=0,i=m+1,\cdots,n.\end{cases}$$ 如此确定的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为子空间 W 的一个投影. 不难证明 $$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$$ 投影 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 $$\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$	
小结	本节需要掌握线性变换 $\mathcal{A}$ 关于基的矩阵及可逆线性变换的逆变换的矩阵，线性变换与其矩阵的关系，向量ξ与 $\mathcal{A}$ (ξ) 关于同一个基的坐标之间的关系，线性变换在给定基下的矩阵的求法、同一个线性变换在不同基下的矩阵之间的关系。	

<table>
<tr><td>思考与练习</td><td>设V是数域P上一个二维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是一组基，线性变换$\mathcal{A}$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵是
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
计算$\mathcal{A}$在V的另一组基η_1,η_2下的矩阵，这里
$$(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>作业</td><td>教材 317:7 318:8；319:9-11</td><td></td></tr>
<tr><td>阅读文献</td><td>1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。
2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。
3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社</td><td></td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td>本节教学学生感到抽象和不易理解。
应对方法：多举实例，让学生参与讨论。</td><td></td></tr>
</table>

授课题目	**线上应用案例微课：线性变换的矩阵（飞机转动案例）**	**教学时数**	0.5 学时
线上教学目标	课程思政：培养爱国主义精神、民族自豪感、勇攀科技高峰的治学精神。		
	课程内容：掌握用线性变换描绘飞机运动姿态的方法；		
	能力培养：培养学生用数学模型思想研究工程问题的能力； 提高学生的 Matlab 编程能力； 培养学生的自主学习和查阅资料的能力		
教学重点	线性变换与飞机转动姿态的关系、数学建模思想应用于工程问题、思政目标的达成		
教学难点	建立数学模型研究飞机的转动姿态		
教学方法	引导式、示范启发式	**教学手段**	虚拟仿真、多媒体教学
教学过程			**设计意图**

<table>
<tr>
<td>线上课程导入</td>
<td>【视频资料】2019 年 3 月 10 日，埃塞俄比亚航空一架搭载着 157 人的波音 737MAX 型航班坠毁，机上人员全部遇难。无独有偶，在 2018 年 10 月 29 日，一架同样机型的印尼狮航航班也发生了空难，机上 189 名人员全部遇难。2019 年 5 月，波音公司公开承认 737MAX 机型存在设计缺陷。


图 2.1 飞机失事现场</td>
<td>引起学生兴趣，引出飞机设计问题</td>
</tr>
</table>

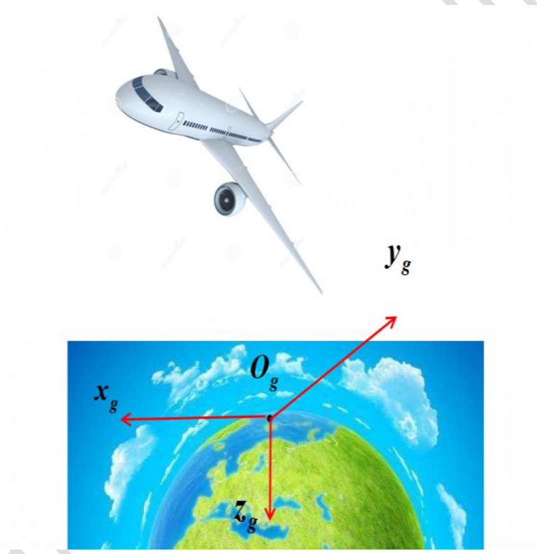
<table>
<tr>
<td>线
上
讲
授
新
课</td>
<td>
一、飞机运动姿态
【二维动画】飞机的运动姿态包括：
平飞： 是最基本的飞行动作，通常指飞机在登等高、等速的条件下做水平直线运动
上升：飞机沿一条倾斜向上的轨迹所做的飞行。
下滑：飞机沿一条倾斜向下的轨迹所做的飞行。
侧滑：飞机对称面与相对气流面不一致的飞行。
二、飞机的坐标系
飞机坐标系主要分为四种：地面坐标系、本体坐标系、气流坐标系和航迹坐标系。
1. 地面坐标系
地面坐标系的主要作用是作为衡量飞机位置和姿态的基准。原点 O_g 选在地面上的一点，轴 z_g 是铅直向下；轴 x_g 在水平面内，其方向可以任意选择；轴 y_g 按右手法则确定。


图 2.2 地面坐标系
2. 本体坐标系
本体坐标系是与飞机本体相连接的。
介绍两个术语：飞机机身纵轴和飞机对称面。飞机机身纵轴就是沿着飞机机身的一条轴线。
飞机对称面就是与飞机机身垂直的一个面，它随着飞机的转动而转动。当飞机平飞时它竖直向下，当飞机倾斜时，例如侧滑，上升，下滑等，对称面也随着变化，但始终保持对称面与机身垂直。
</td>
<td>
此处二维动画演示四种运动，形象直观。

虚拟仿真（见视频）讲授四种坐标系，更好呈现每种坐标系的特点，与飞机之间的关系。

虚拟仿真下，点击飞机机身出现机身纵轴（见视频），更加直观准确演示概念。
</td>
</tr>
</table>

原点O在飞机的质心，纵向轴x_b沿飞机结构纵轴，指向前；竖向轴z_b在对称平面内，垂直于纵轴x_b，指向下；轴y_b垂直于对称平面，指向右方。

当飞机转动时，本体坐标系也随着转动。

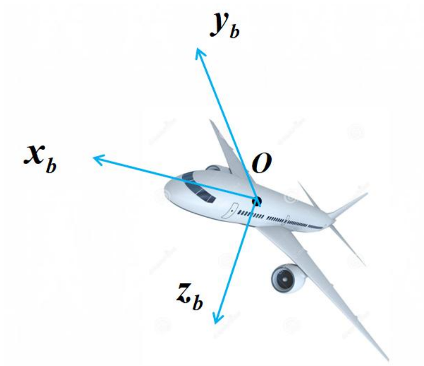


图 2.3 本体坐标系

3. 气流坐标系

原点O在飞机的质心，轴x_a沿气流速度矢量V，指向前；轴z_a在对称平面内，垂直于x_a指向下；轴y_a垂直于x_a和z_a，指向右方。

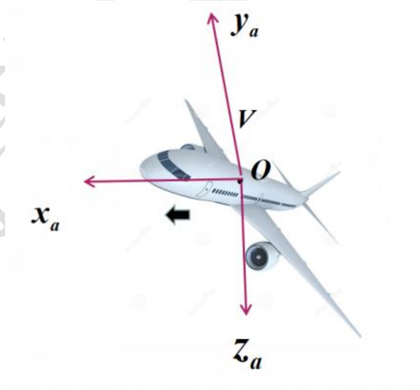


图 2.4 气流坐标系

4. 航迹坐标系

原点O在飞机的质心，轴x_k沿航迹速度矢量V_k，近似看成与气流坐标系的轴x_a同向，指向前；轴z_k在通过航迹速度矢量的铅垂平面内，指向下；轴y_k垂直于x_k和z_k，指向右方。

虚拟仿真下，演示对称面，准确展示对称面与飞机机身的相对位置关系，此处虚拟仿真的优势在于比概念的叙述更加准确体现内涵。

虚拟仿真演示坐标系。

虚拟仿真演示本体坐标系沿着飞机的转动而转动。效果逼真。

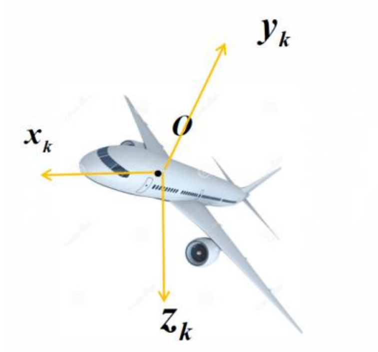


图 2.5 航迹坐标系

三、数学建模及求解

步骤 1：写出数据图形矩阵，画出飞机模型。

我们把飞机的三维图像用 n 个顶点的三维坐标描述，写成一个 $3\times n$ 的数据矩阵 G （此处取 $n=8$），使用 Matlab 即可画出一个最简单的飞机立体图。根据如下的数据矩阵 G 来编写 Matlab 程序。

$$G=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 7 & -3 & -3 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用 Gw 表示机身，那么矩阵的前四列元素表示的就是机身上的点。

```
Gw=[-4,-3,0;4,-3,0;0,7,0;-4,-3,0]';
```

Gt 表示机尾，那么后四列元素就表示机尾上的点。

```
Gt=[0,-3,0;0,-3,3;0,2,0;0,-3,0]';
G=[Gw Gt];            % 飞机的初始状态
```

我们用 plot 命令画出机身和机尾，并用红和绿两种颜色加以区分，从而得到飞机的初始姿态。其中红色表示机身，绿色表示机尾。

```
plot3(Gw(1,:),Gw(2,:),Gw(3,:),'r'),hold on
plot3(Gt(1,:),Gt(2,:),Gt(3,:),'g'),axis equal
```

Matlab 程序采用录屏，更加形象直观，加深学生印象。

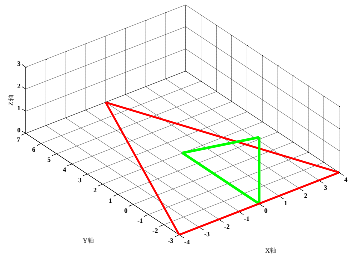


图 2.6 用 Matlab 绘制的最简单的飞机立体图

步骤 2:求出基向量的旋转矩阵，建立线性变换。

我们先来选取与坐标轴同向的三个单位向量，它们可以看成是空间的一组基底，而飞机在每个瞬间的转动姿态都可以由这三个基向量旋转后的像来线性表出，因此我们需要求出三种转动矩阵，来建立飞机转动的线性变换，因为线性变换是由矩阵所唯一确定的。

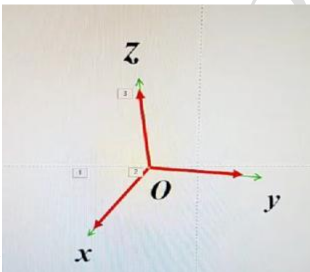


图 2.7 建立空间直角坐标系

我们来看二维平面上基向量的旋转矩阵。

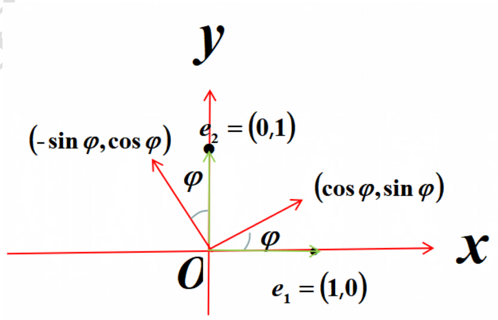


图 2.8 xOy 坐标面基向量 e_1,e_2 的旋转示意图

从而得到旋转矩阵和旋转坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

此处通过基向量的旋转来建立飞机转动的线性变换。

为了求三维空间的旋转矩阵，先求二维空间的旋转矩阵，由浅入深，逐次推导。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

同理，飞机在空间中绕本体坐标系的三个轴转动后的姿态或位置可由与三个坐标轴同向的单位向量的旋转矩阵来确定。

绕 x 轴逆时针旋转 w 角， x 坐标不变，所对应矩阵的第一行第一列写为

推广到三维空间。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

其余元素按照二维平面的旋转矩阵来写

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & -\sin w \\ 0 & \sin w & \cos w \end{pmatrix}$$

同理，绕 y 轴逆时针旋转 γ 角，得到矩阵 P 。

$$P = \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

绕 z 轴逆时针旋转 u 角，得到矩阵 Y

$$Y = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

也可将三种转动矩阵复合起来，即令 $Q = YPR$ 。

1. 复合 $Q = YPR$

2. 飞机转动后的状态矩阵 $G_1 = QG$

3. 飞机上任一点转动后的坐标 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

建立起描述飞机转动的线性变换。

步骤 3：利用 Matlab 软件编程，描绘飞机转动后的状态。

通过给上面得到的旋转矩阵 Q 赋值飞机不同的旋转角

u,v,w，就可以画出飞机转动后的不同姿态。

例如，令 $(u,v,w)=\left(\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{3}\right)$，$(u,v,w)=\left(\frac{\pi}{3},0,\frac{3\pi}{4}\right)$，利用语句 syms u w y 来创建符号变量，用来表示绕三个坐标轴旋转的角度。写出三个旋转矩阵

```
Y=[cos(u),sin(u),0;-sin(u),cos(u),0;0,0,1];
R=[1,0,0;0,cos(w),-sin(w);0,sin(w),cos(w)];
P=[cos(v),0,-sin(v);0,1,0;sin(v),0,cos(v)];
```

合并成为

```
Q=Y*P*R;
```

下面我们给角度赋值

```
A1=subs(Q,{u,v,w},{pi/6,0,pi/3});
% A1  表示：(u,v,w)=(pi/6,0,pi/3)时的转动矩阵
```

飞机的状态矩阵为 G1

```
G1=A1*G;       % (1)(u,v,w)=(pi/6,0,pi/3)时飞行器的状态
G1w=G1(1:3,1:4);
G1t=G1(1:3,5:8);
```

画图

```
subplot(2,3,1)
plot3(G1w(1,:),G1w(2,:),G1w(3,:),'r'),hold on
plot3(G1t(1,:),G1t(2,:),G1t(3,:),'g'), axis equal
```

运行后得到的图像为

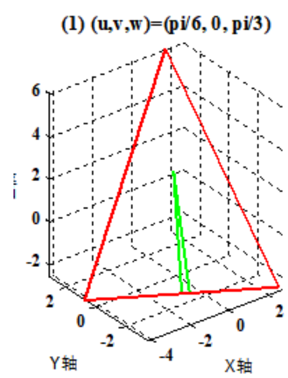


图 2.9 旋转角 $u=\pi/6, v=0, w=\pi/3$ 时飞机转动后的姿态

这一部分着重培养学生的编程能力。

程序以录屏的形式展现，效果逼真，加深学生的印象。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

我们再换一个角度，令

$$(u,v,w)=\left(\frac{\pi}{3},0,\frac{3\pi}{4}\right)$$

同样编程运行后，得到图像

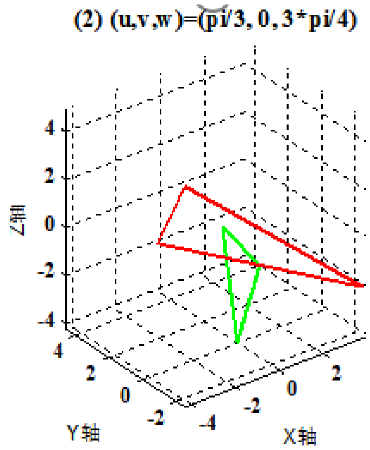


图 2.10 旋转角 $u=\pi/3, v=0, w=3\pi/4$ 时飞机转动后的姿态

这样我们就完成了用数学建模的方法来描绘飞机转动后的姿态。

用线性变换来研究飞机的转动姿态，其实是一种较为理想的情况。在实际的飞机设计中，转动惯量是必须考虑的因素，它是决定飞机的运动姿态的重要因素。提出问题，什么是飞机转动惯量，如何针对飞机转动惯量建立数学模型。

</td>
<td>提出“转动惯量”这一飞机设计和飞行运动中的重要影响因素，激发学生探索，培养学生的自主学习能力。</td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>

1. 线性变换与飞机转动姿态的关系。
2. 如何对工程问题建立数学模型。
3. 利用 Matlab 软件编程并画图。
4. 了解虚拟仿真技术在很多难度大或根本无法实现的试验中的应用。

</td>
<td>总结知识点，并拓展知识，激发自主学习。</td>
</tr>
<tr>
<td>作
业</td>
<td>查找转动惯量的定义，研究它对飞机设计的影响，针对转动惯量如何建立数学模型，描绘飞机转动后的姿态。</td>
<td>培养学生查阅资料、科学研究的能力</td>
</tr>
</table>

授课题目	7.4 特征值与特征向量	**教学时数**	4 学时
线上预习目标	1. 了解特征值、特征向量的定义 2. 了解特征值、特征向量的求法		
教学目标	掌握线性变换的特征值和特征向量的概念及其求法		
思政目标	1. 培养学生**严谨的科学精神** 2. 讨论式教学模式培养学生的**合作精神**和**团队意识**。		
教学重点	线性变换与矩阵的特征值与特征向量的概念及求法。		
教学难点	相似矩阵特征多项式的关系。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时） 线上（1.6 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	**教学手段**	线上线下混合式教学

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 3.录制知识点总结微课，上传学习通 **学生：（线上学习内容）** 4.学习特征值、特征向量引课微课（自制） 5. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 6. 学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 7. 线下课程后复习“特征值问题微课”（自制） **教师：（线上教学总结）** 8. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 9. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3. 线上复习用 4、5. 6.7 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 8. 9. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。

线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.特征值、特征向量的定义 2.特征值、特征向量的求法 在上节我们已经知道，若能找到一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，使得$\mathscr{A}$关于这个基的矩阵是一个对角阵，即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 亦即$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_n\boldsymbol{\alpha}_n$. 这给我们一个很重要的启示，即研究线性变换$\mathscr{A}$，很重要的事情就是去找满足条件$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\lambda\boldsymbol{\xi}$的数$\lambda$及非零向量$\boldsymbol{\xi}$，这就是本节的主要内容 .	检验预习效果 温故知新，自然引入新课
线 下 讲 授 新 课	**一、线性变换的特征值和特征向量的概念** **定义 4** 设$\mathscr{A}$是数域P上线性空间V的一个线性变换，如果对于数域P中一数λ_0，存在一个非零向量ξ，使得 $\mathscr{A}\xi=\lambda_0\xi$. （1） 那么$\lambda_0$称为$\mathscr{A}$的一个特征值，而$\xi$叫做$\mathscr{A}$的属于特征值$\lambda_0$的一个特征向量. 从几何上来看，特征向量的方向经过线性变换后，保持在同一条直线上，这时或者方向不变$(\lambda_0>0)$或者方向相反$(\lambda_0<0)$，至于$(\lambda_0=0)$时，特征向量就被线性变换变成 0. 如果ξ是线性变换$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的特征向量，那么ξ的任何一个非零倍数$k\xi$也是$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的特征向量. 这说明特征向量不是被特征值所唯一决定的. 相反，特征值却是被特	强调定义的几何意义加深理解 强调特征值与特征向量的对应关系

线 下 讲 授 新 课	征向量所唯一决定的，因为，一个特征向量只能属于一个特征值. **二、特征值与特征向量的求法** 设V是数域P上n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是它的一组基，线性变换$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵是$A$. 设$\lambda_0$是特征值，它的一个特征向量$\xi$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是$x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}$，则 $\mathcal{A}\xi$ 的坐标是 $$A\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix}.$$ $\lambda_0\xi$的坐标是 $$\lambda_0\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix}$$ 因此（1）式相当于坐标之间的等式 $$A\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix} \qquad (2)$$ 或 $$(\lambda_0E-A)\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix}=0$$ 这说明特征向量ξ的坐标$(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})$满足齐次方程组 $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda_0x_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda_0x_2,\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda_0x_n,\end{cases}$$ 即	此处推导采用生生讨论、师生讨论（基于线上学习基础） 利用方程组理论解决本章问题，线上预习

线 下 讲 授 新 课	$$\begin{cases}(\lambda_0-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0,\\ -a_{21}x_1 + (\lambda_0-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda_0-a_{nn})x_n = 0,\end{cases} \qquad (3)$$ 由于$\xi \neq 0$,所以它的坐标$x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}$不全为零，即齐次方程组有非零解. 而齐次方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式为零，即 $$\lvert\lambda_0 E - A\rvert = \begin{vmatrix}\lambda_0-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda_0-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0-a_{nn}\end{vmatrix} = 0.$$ **定义 5** 设A是数域P上一个n级矩阵,λ是一个数字.矩阵$\lambda E - A$的行列式 $$\lvert\lambda E - A\rvert = \begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}.$$ (4) 叫做矩阵A的特征多项式,这是数域P上的一个n次多项式. 上面的分析说明，如果λ_0是线性变换$\mathcal{A}$的特征值，那么λ_0一定是矩阵A的特征多项式的一个根；反过来，如果λ_0是矩阵A的特征多项式在数域P中的一个根，即$\lvert\lambda_0 E - A\rvert = 0$，那么齐次方程组（3）就有非零解.这时，如果$(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$是方程组（3）的一个非零解，那么非零向量 $$\xi = x_{01}\varepsilon_1 + x_{02}\varepsilon_2 + \cdots + x_{0n}\varepsilon_n)$$ 满足（1），即λ_0是线性变换$\mathcal{A}$的一个特征值，ξ就是属于特征值λ_0的一个特征向量.	强调行列式的本质是多项式

线 下 讲 授 新 课	因此确定一个线性变换 $\mathscr{A}$ 的一个特征值与特征向量的方法可以分成以下几步： 1. 在线性空间 V 中取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，写出 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵 A； 2. 求出 A 的特征多项式 $\lvert\lambda_0 E-A\rvert$ 在数域 P 中全部的根，它们也就是线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部特征值； 3. 把所求得的特征值逐个地代入方程组（3），对于每一个特征值，解方程组（3），求出一组基础解系，它们就是属于这个特征值的几个线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标，这样，也就求出了属于每个特征征的全部线性无关的特征向量. 矩阵 A 的特征多项式的根有时也称为 A 的特征值，而相应的线性方程组（3）的解也就称为 A 的属于这个特征值的特征向量. **例 1** 在 n 维线性空间中，数乘变换 $\mathscr{K}$ 在任意一组基下的矩阵都是 kE，它的特征多项式是 $$\lvert\lambda E-kE\rvert=(\lambda-k)^n.$$ 因此，数乘变换 $\mathscr{K}$ 的特征值只有 k，由定义可知，每个非零向量都是属于数乘变换 $\mathscr{K}$ 的特征向量. **例 4** 平面上全体向量构成实数域上一个二维线性空间，§1 例 1 中旋转 $\mathscr{F}_\theta$ 在直角坐标系下的矩阵为 $$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ 它的特征多项式为 $$\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1$$	用实例说明概念，更加直观

线下讲授新课

当$\theta \neq k\pi$时，这个多项式没有实根. 因之，当$\theta \neq k\pi$时，$\mathscr{F}_\theta$没有特征值. 从几何上看，这个结论是明显的.

容易看出，对于线性变换$\mathscr{A}$的任一个特征值λ_0，全部适合条件

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda_0 \alpha$$

的向量α所成的集合，也就是$\mathscr{A}$的属于λ_0的全部特征向量再添上零向量所成的集合，是V的一个子空间，称为$\mathscr{A}$的一个特征子空间，记为V_{λ_0}.显然，V_{λ_0}的维数就是属于λ_0的线性无关的特征向量的最大个数.用集合记号可写为.

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \mid A\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \in V\}$$

在线性变换的研究中，矩阵的特征多项式是重要的. 下面先来看一下它的系数. 在

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

的展开式中，有一项是主对角线上元素的连乘积

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

展开式中的其余项，至多包含$n-2$个主对角线上的元素，它对λ的次数最多是$n-2$. 因此特征多项式中含λ的n次与$n-1$次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现，它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

在特征多项式中令$\lambda = 0$，即得常数项$|-A| = (-1)^n |A|$.

因此，如果只写特征多项式的前两项与常数项，就有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| .$$

线下讲授新课

(5)

由根与系数的关系可知，A的全体特征值的和为$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$（称为$A$的迹）. 而的$A$全体特征值的积为$|A|$.

特征值自然是被线性变换所决定的. 但是在有限维空间中，任取一组基后，特征值就是线性变换在这组基下矩阵的特征多项式的根. 随着基的不同，线性变换的矩阵一般是不同的. 但是这些矩阵是相似的，对于相似矩阵有

定理 6 相似矩阵有相同的特征多项式.

证明　设 A ~ B

即有可逆矩阵 X，使$B=X^{-1}AX$

于是$|\lambda E-B|=|\lambda E-X^{-1}AX|=|X^{-1}(\lambda E-A)X|$

$=|X^{-1}||\lambda E-A||X|=|\lambda E-A|$

定理 6 说明，线性变换的矩阵的特征多项式与基的选取无关，它直接被线性变换所决定的. 因此，以后就可以说线性变换的特征多项式了.

既然相似的矩阵有相同的特征多项式，当然特征多项式的各项系数对于相似的矩阵来说都是相同的. 考虑特征多项式的常数项，得到相似矩阵有相同的行列式. 因此，以后就可以说线性变换的行列式.

应该指出，定理 6 的逆是不对的，特征多项式相同的矩阵不一定是相似的. 例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

它们的特征多项式都是$(\lambda-1)$，但A和B不相似，因为和A相似的矩阵只能是A本身.

哈密顿-凯莱(Hamilton-Caylay)定理 设A是数域P上一个

线下讲授新课

$n\times n$ 矩阵， $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0$$

证明　设 $B(\lambda)$ 是 $\lambda E-A$ 的伴随矩阵，由行列式的性质，有

$$B(\lambda)\left(\lambda E-A\right)=|\lambda E-A|E=f\left(\lambda\right)E$$

因为矩阵 $B(\lambda)$ 的元素是 $|\lambda E-A|$ 的各个代数余子式，都是 λ 的多项式，其次数不超过 n-1. 因此由矩阵的运算性质， $B(\lambda)$ 可以写成 $B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$

其中 B_0, $B_1,\cdots$, B_{n-1} 都是 $n\times n$ 数字矩阵。

再设 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，则

$$f(\lambda)E=\lambda^nE+a_1\lambda^{n-1}E+\cdots+a_{n-1}\lambda E+a_nE \qquad (6)$$

而

$$\begin{aligned}B(\lambda)\left(\lambda E-A\right)&=(\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})\left(\lambda E-A\right)\\&=\lambda^nB_0+\lambda^{n-1}(B_1-B_0A)+\lambda^{n-2}(B_2-B_1A)\\&\quad+\cdots+\lambda(B_{n-i}-B_{n-2}A)-B_{n-i}A \qquad (7)\end{aligned}$$

比较（6）和（7），得

$$\begin{cases}B_0=E\\B_1-B_0A=a_1E\\B_2-B_1A=a_2E\\\quad\cdots\cdots\\B_{n-1}-B_{n-2}A=a_{n-1}E\\-B_{n-1}A=a_nE\end{cases} \qquad (8)$$

以 $A^n,A^{n-1},\cdots,A,E$ 依次从右边乘（8）的第一式，第二式，.....，第 n 式，第 n+1 式，得

$$
\begin{cases}
B_0A^n = EA^n = A^n \\
B_1A^{n-1} - B_0A^n = a_1EA^{n-1} = a_1A^{n-1} \\
B_2A^{n-2} - B_1A^{n-1} = a_2EA^{n-2} = a_2A^{n-2} \\
\cdots\cdots \\
B_{n-1}A - B_{n-2}A^2 = a_{n-1}EA = a_{n-1}A \\
-B_{n-1}A = a_nE
\end{cases} \qquad (9)
$$

把（9）的 n+1 个式子一起加起来，左边变成零，右边即为 $f(A)$

故 $f(A)=O$ 。定理得证。

推论 设 $\mathscr{A}$ 是有限维空间 V 的线性变换，$f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，那么 $f(\mathscr{A})=o$.

新知扩展

例 3 在空间 $P[x]_n$ 中，线性变换

$$\mathscr{D} f(x) = f'(x)$$

在基 $1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \cdots, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下的矩阵是

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

D 的特征多项式是

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n .$$

因此，D 的特征值只有 0. 通过解相应的齐次线性方程组知道，属于特征值 0 的线性无关的特征向量组只能是任一非零常数. 这表明微商为零的多项式只能是零或非零的常数.

小 结	本节需要掌握线性变换的特征值和特征向量的概念及其求法，理解相似矩阵特征多项式的关系。	
思 考 与 练 习	设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$ 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.	加深理解
作 业	教材 320:17，19	巩固所学
阅 读 文 献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教 学 反 思	录制了“特征多项式微课”，用于线上复习，使学生抓住本课要点，从学生的反馈看，录制的知识点总结微课、作业题讲解微课非常有针对性，受到学生欢迎。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">7.5 对角矩阵</td><td>教学时数</td><td>4 学时</td></tr>
<tr><td>线上学习目标</td><td colspan="4">了解矩阵可对角化的条件</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">矩阵可对角化的条件和化法．深刻理解特征向量的性质和线性变换在某组基下矩阵为对角矩阵的充分条件及充要条件。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">通过矩阵对角化的条件教学培养学生严谨的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">线性变换在某组基下矩阵为对角矩阵的充分条件及充要条件。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">线性变换与矩阵可对角化的判定。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时）
线上（1.6 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）学生在学习通学习“对角化问题微课”（自制），作为课后巩固。
线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
<tr><td>线上教学过程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。
3.录制知识点总结微课，上传学习通。

学生：（线上学习内容）
4. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
5. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果
3. 线上复习用</td></tr>
</table>

	6. 学习通上学习“对角化问题微课”、“代数重数与几何重数的关系说明微课”，复习本节课知识要点。 **教师：（线上教学总结）** 7. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 8. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	4、5. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 6. 课后复习微课，巩固所学 7、8. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 矩阵对角化的条件有哪些？ 复习提问线性变换的特征值特征向量的定义及求法。	检验预习效果 温故知新
线下讲授新课	**定理 7** 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的矩阵可以在某一基下为对角矩阵的充要条件是 $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 设 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下具有对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 这就是说	

线下讲授新课

$$\mathscr{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,n$$

因此，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 就是 $\mathscr{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量。

反过来，如果 $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，那么就取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为基，显然，在这组基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵是对角矩阵。

定理 8 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证明　对特征值的个数作数学归纳法，由于特征向量是不为零的，所以单个的特征向量必然线性无关。现在设属于 k 个不同特征值的特征向量线性无关，我们证明属于 k+1 个不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}$ 的特征向量 ξ_1，$\xi_2,\cdots\xi_{k+1}$ 也线性无关。

假设有关系式

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_{k+1}\xi_{k+1}=0 \qquad (1)$$

成立。等式两端乘 λ_{k+1}，得

$$a_1\lambda_{k+1}\xi_1+a_2\lambda_{k+1}\xi_2+\cdots+a_{k+1}\lambda_{k+1}\xi_{k+1}=0 \qquad (2)$$

（1）式两端同时施行变换 $\mathscr{A}$，即有 $a_1\lambda_1\xi_1+a_2\lambda_2\xi_2+\cdots+a_{k+1}\lambda_{k+1}\xi_{k+1}=0$ （3）

（2）减去（2）得到

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\xi_1+\cdots+a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\xi_k=0$$

根据归纳假设，ξ_1，$\xi_2,\cdots\xi_k$ 线性无关，于是

$$a_i(\lambda_i-\lambda_{k+1})=0, i=1,2,\cdots,k$$

但 $\lambda_i-\lambda_{k+1}\neq 0\,(i\le k)$，所以 $a_i=0, i=1,2,\cdots,k$，这时（1）式变成 $a_{k+1}\xi_{k+1}=0$。又因为 $\xi_{k+1}\neq 0$，所以只有 $a_{k+1}=0$。这就证明了 ξ_1，$\xi_2,\cdots\xi_{k+1}$ 线性无关。

推论 1 如果在 n 维线性空间 V 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项

此处证明交给学生证明，通过组内加分形式调动学生的积极性。

式在数域P中有n个不同的根，即Å有n个不同的特征值，那么$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是对角形的.

推论 2 在复数上的线性空间中，如果线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式没有重根，那么$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是对角形的.

在一个线性变换没有个不同的特征值的情形,要判断这个线性变换的矩阵能不能成为对角形，问题就要复杂些.

定理 9 如果$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$是线性变换$\mathscr{A}$的不同的特征值，而$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$是属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，$i=1,2,\cdots,k$那么向量组$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{ir_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$也线性无关.

根据这个定理，对于一个线性变换，求出属于每个特征值的线性无关的特征向量，把它们合在一起还是线性无关的.如果它们的个数等于空间的维数,那么这个线性变换在一组合适的基下的矩阵是对角矩阵；如果它们的个数少于空间的维数，那么这个线性变换在任何一组基下的矩阵都不能是对角形.换句话说，设$\mathscr{A}$全部不同的特征值是$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，于是$\mathscr{A}$在某一组基下的矩阵成对角形的充要条件是$\mathscr{A}$的特征子空间$V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_r}$的维数之和等于空间的维数.

应该看到，当线性变换$\mathscr{A}$在一组基下的矩阵A是对角形时：

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathscr{A}$的特征多项式就是

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

因此，如果线性变换$\mathscr{A}$在一组基下的矩阵是对角形，那么

	主对角线上的元素除排列次序外是确定的，它们正好是A的特征多项式全部的根（重根按重数计算）. 根据§3 定理 5，一个线性变换的矩阵能不能在某一组基下是对角形的问题就相当于一个矩阵是不是相似于一个对角矩阵的问题.	
新知扩展	《高等代数选讲》教材中的内容总结，典型例题作为本节课内容的拓展。 187 页 6 题 、15 题	完善知识体系。
小结	本节需要掌握矩阵可对角化的条件和化法. 深刻理解特征向量的性质和线性变换在某组基下矩阵为对角矩阵的充分条件及充要条件。会线性变换与矩阵可对角化的判定。	
思考与练习	**例** 在§4 的例 2 中，已经算出线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值是−1（二重）与 5，而对应的特征向量是 $\xi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3,$ $\xi_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$ $\xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$ 由此可见，$\mathcal{A}$ 在基ξ_1,ξ_2,ξ_3.下的矩阵为对角矩阵 $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 而由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\xi_1,\xi_2,\xi_3$.的过渡矩阵是	

	$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$ 于是， $X^{-1}AX=B$.	
作业	教材 321:20-23	巩固所学
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	定理 8 的证明方法非常典型，采用学生讨论后自主证明的教学方法后，对学生的逻辑思维培养有重要意义。	

授课题目	7.6 线性变换的值域与核	**教学时数**	4 学时
线上预习目标	1. 了解线性变换的值域与核的定义 2. 常见线性变换值域与核的举例		
教学目标	掌握线性变换的值域与核的概念，以及它们维数间的关系。		
思政目标	1. 培养学生**严谨的科学精神** 2. 类比概念教学法体现**事物普遍联系**的哲学思想 3. 线性变换的秩与矩阵的秩体现**抽象与具体**的关系		
教学重点	线性变换的值域与核的概念与求法		
教学难点	线性变换的值域与核的求法与证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时） 线上（1.6 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	**教学手段**	线上线下混合式教学

教学过程		设计意图
线 上 教 学 过 程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。

线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 线性变换值域与核的定义 线性变换的像的集合对于运算能做成线性空间吗？零元素的原像能做成线性空间吗？	检验预习效果
线 下 讲 授 新 课	**定义 6** 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的值域，用 $\mathscr{A}V$ 表示.所有被 $\mathscr{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的核，用 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 表示. 若用集合的记号则 $\mathscr{A}V=\{A\xi \mid \xi\in V\},\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\xi \mid A\xi=0,\xi\in V\}$ 线性变换的值域与核都是 V 的子空间. $\mathscr{A}V$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的秩，$\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的零度. **例 1** 在线性空间 $P[x]_n$ 中，令 $$\mathscr{D}(f(x))=f'(x)$$ 则 $\mathscr{D}$ 的值域就是 $P[x]_{n-1}$，$\mathscr{D}$ 的核就是子空间 P. **定理 10** 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，在这组基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵是 A，则	**思政**：与函数的值域定义类比，体现**事物普遍联系**的思想

线下讲授新课

1） $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V$ 是由基像组生成的子空间，即

$$\mathscr{A}V = L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n)$$

3）$\mathscr{A}$ 的秩= A 的秩.

证明 1) 设 ξ 是 V 中任一向量，可用基的线性组合表示为

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

于是

$$\mathscr{A}\xi = x_1 A\varepsilon_1 + x_2 A\varepsilon_2 + \cdots + x_n A\varepsilon_n$$

这个式子说明，$\mathscr{A}\xi \in L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n)$

因此，$\mathscr{A}V$ 包含在 $L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n)$ 内。这个式子还表明基像组的线性组合还是一个像，因此 $L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n)$ 包含在 $\mathscr{A}V$ 内，这样 $\mathscr{A}V = L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n)$

2)根据 1)，$\mathscr{A}$ 的秩等于基像组的秩，另一方面，矩阵 A 是由基像组的坐标按列排成的。在前一章第 8 节中曾谈过，若在 n 维线性空间 V 中取定了一组基之后，把 V 的每一个向量与它的坐标对应起来，我们就得到 V 到 P^n 的同构对应。同构对应保持向量组的一切线性关系，因此基像组与它们的坐标组（即矩阵 A 的列向量组）有相同的秩。

定理 10 说明线性变换与矩阵之间的对应关系保持不变.

定理 11 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则 $\mathscr{A}V$ 的一组基的原像及 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基合起来就是 V 的一组基.由此还有

$$\mathscr{A} \text{ 的秩} + \mathscr{A} \text{ 的零度} = n$$

证明 设 $\mathscr{A}V$ 的一组基为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$，它们的原像为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$，$\mathscr{A}\varepsilon_i = \eta_i, i = 1, 2, \cdots, r$。又取 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基为 $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_s$，现在

思政：

线性变换秩的概念与矩阵秩的概念体现抽象与具体的关系

来证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 为 V 的基。如果有

$$l_1\varepsilon_1+\cdots+l_r\varepsilon_r+l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s=0$$

用 $\mathcal{A}$ 去变换它的两端的向量，则

$$l_1A\varepsilon_1+\cdots+l_rA\varepsilon_r+l_{r+1}A\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_sA\varepsilon_s=A0=0$$

因 $\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 属于 $\mathcal{A}^{-1}(0)$，故 $A\varepsilon_{r+1}=\cdots=A\varepsilon_s=0$

又 $\mathcal{A}\varepsilon_i=\eta_i,i=1,2,\cdots,r$。由上式即得

$$l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_r\eta_r=0$$

但 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是线性无关的，有 $l_1=l_2=\cdots=l_r=0$

于是 $l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s=0$。$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 又是 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基也线性无关，就有 $l_{r+1}=\cdots=l_s=0$。这证明了 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 是线性无关的。

再证 V 的任一向量 α 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 的线性组合，由 $\eta_1=A\varepsilon_1,\cdots$，$\eta_r=A\varepsilon_r$ 是 $\mathcal{A}V$ 的基，就有一组数 $l_1,\cdots$，l_r 使 $A\alpha=l_1A\varepsilon_1+\cdots+l_rA\varepsilon_r=A\left(l_1\varepsilon_1+\cdots+l_r\varepsilon_r\right)$。

于是 $A\left(\alpha-l_1\varepsilon_1-\cdots-l_r\varepsilon_r\right)=0$，即 $\alpha-l_1\varepsilon_1-\cdots-l_r\varepsilon_r\in A^{-1}\left(0\right)$。$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 又是 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基，必有一组数 $l_{r+1},\cdots$，l_s，使 $\alpha-l_1\varepsilon_1-\cdots-l_r\varepsilon_r=l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s$，

于是 $\alpha=l_1\varepsilon_1+\cdots+l_r\varepsilon_r+l_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+l_s\varepsilon_s$ 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 的线性组合。

这就证明了 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_s$ 是 V 的一组基。

由 V 的维数为 n，知 $s=n$。又 r 是 $\mathcal{A}V$ 的维数也即 $\mathcal{A}$ 的秩，$s-r=n-r$ 是 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数，即 $\mathcal{A}$ 的零度。因而

$$\mathcal{A}\text{的秩}+\mathcal{A}\text{的零度}=n$$

新知扩展	**补充**：对于有限维线性空间的线性变换，它是单射的充要条件是它是满射. 证明　显然，当且仅当 $\mathscr{A}V=V$，即 $\mathscr{A}$ 的秩为 n 时，$\mathscr{A}$ 是满射；另外，当且仅当 $\mathscr{A}^{-1}(0)=\{0\}$，即 $\mathscr{A}$ 的零度为 0 时，$\mathscr{A}$ 是单射，于是由上述定理即可得出结论。 虽然子空间 $\mathscr{A}V$ 与 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数之和为 n，但是 $\mathscr{A}V+\mathscr{A}^{-1}(0)$ 并不一定是整个空间.	加强思维训练
小结	掌握线性变换的值域与核的概念，以及它们维数间的关系	
思考与练习	设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，$A^2=A$ 证明 A 相似于一个对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$　　（1） 证明　取一 n 维线性空间 V 以及 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$。定义线性变换 $\mathscr{A}$ 如下： $\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$ 我们来证明，$\mathscr{A}$ 在一组适当的基下的矩阵是（*1*）。这样，由定理 *4*，也就证明了所要的结论。 由 $A^2=A$，可知 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$。我们取 $\mathscr{A}V$ 的一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$。由 $A\eta_1=\eta_1,\cdots$，$A\eta_r=\eta_r$，它们的原像也是 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$。再取 $\mathscr{A}^{-1}(0)$	

	的一组基$\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$。由定理11的推论知：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$，$\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$是V的一组基。在这组基下，$\mathcal{A}$的矩阵就是（1）。	
作业	复习本节课定理的证明，完成学习通线上测试	
阅读文献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教学反思	本节课内容抽象，学生理解不太好。 应对办法：增加习题训练。	

授课题目	7.7 不变子空间	教学时数	2 学时
线上预习目标	1. 了解不变子空间的概念 2. 了解常见的不变子空间		
教学目标	本节要求掌握不变子空间的概念及其不变子空间的判断方法，深刻理解线性空间分解成不变子空间直和的充要条件		
思政目标	培养学生严谨的科学精神		
教学重点	不变子空间的定义及证明方法。		
教学难点	线性空间分解成不变子空间直和的充要条件。		
教学方法	线上线下混合式教学（0.4 学时+0.6 学时） 线上（0.4 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）完成作业后，学习学习通的作业题微课（自制） 线下（0.6 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学（线上学银在线视频课预习+线上学习通自制微课复习+线下讨论、讲授式相结合）

	教学过程	设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 3.录制本章作业题微课，上传学习通。 **学生：（线上学习内容）** 4. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 5. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3. 线上复习用

	教师：（线上教学总结） 6. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 7. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	4、5. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 6、7. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 不变子空间的定义及证明方法？ 对于给定的 n 维线性空间 V ,$\mathcal{A}\in L(V)$,如何才能选到 V 的一个基,使 $\mathcal{A}$ 关于这个基的矩阵具有尽可能简单的形式.由于一个线性变换关于不同基的矩阵是相似的.因而问题也可以这样提出:在一切彼此相似的 n 阶矩阵中,如何选出一个形式尽可能简单的矩阵.这一节介绍不变子空间的概念，来说明线性变换的矩阵的化简与线性变换的内在联系.	检验预习效果
线下讲授新课	**定义 7** 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的一个子空间. 如果 W 中的向量在 $\mathcal{A}$ 下的像仍在 W 中，换句话说，对于 W 中任一向量 ξ，有 $\mathcal{A}\xi\in W$，就称 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，简称 $\mathcal{A}$–子空间. **例 1** 整个空间 V 和零子空间 $\{0\}$，对于每个线性变换 $\mathcal{A}$，都是 $\mathcal{A}$–子空间.	

线下讲授新课

例 2 $\mathscr{A}$ 的值域与核都是 $\mathscr{A}$–子空间.

例 3 若线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是可交换的,则 $\mathscr{B}$ 的核与值都是 $\mathscr{A}$–子空间.

因为 $\mathscr{A}$ 的多项式 $f(\mathscr{A})$是和 $\mathscr{A}$ 交换的，所以 $f(\mathscr{A})$的值域与核都是 $\mathscr{A}$–子空间.

例 4 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间.

特征子空间与一维不变子空间之间有着紧密的联系.设W 是一维 $\mathscr{A}$–子空间，ξ 是W 中任何一个非零向量，它构成W 的一个基. 按 $\mathscr{A}$–子空间的定义，$\mathscr{A}\xi \in W$,它必是ξ 的一个倍数:

$$\mathscr{A}\xi = \lambda_0 \xi .$$

这说明ξ 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量,而W 即是由ξ 生成的一维 $\mathscr{A}$–子空间.

反过来，设ξ 是 $\mathscr{A}$ 属于特征值λ_0 的一个特征向量，则ξ 以及它任一倍数在 $\mathscr{A}$ 下的像是原像的λ_0 倍，仍旧是ξ 的一个倍数. 这说明ξ 的倍数构成一个一维 $\mathscr{A}$–子空间.

显然，$\mathscr{A}$ 的属于特征值λ_0 的一个特征子空间V_{λ_0} 也是 $\mathscr{A}$ 的一不变子空间.

$\mathscr{A}$–子空间的和与交还是 $\mathscr{A}$–子空间.

设 $\mathscr{A}$ 是线性空间V 的线性变换，W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.由于W 中向量在 $\mathscr{A}$ 下的像仍在W 中，这就使得有可能不必在整个空间V 中来考虑 $\mathscr{A}$，而只在不变子空间W 中考虑 $\mathscr{A}$，即把 $\mathscr{A}$ 看成是W 的一个线性变换，称为 $\mathscr{A}$ 在不变子空间W 上引起的变换. 为了区别起见，用符号 $\mathscr{A}|W$ 来表示它；但是在很多情况下，仍然

用 $\mathscr{A}$ 来表示而不致引起混淆.

必须在概念上弄清楚 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}|W$ 的异同：$\mathscr{A}$ 是V 的线性变换，V 中每个向量在 $\mathscr{A}$ 下都有确定的像；$\mathscr{A}|W$ 是不变子空间W 上的线性变换，对于W 中任一向量ξ，有

$$(\mathscr{A}|W)\xi=\mathscr{A}\xi.$$

但是对于V 中不属于W 的向量η来说，$(\mathscr{A}|W)\eta$ 是没有意义的.

例如，任一线性变换在它的核上引起的变换就是零变换，而在特征子空间V_{λ_0}上引起的变换是数乘变换 λ_0.

线下讲授新课

如果线性空间V 的子空间W 是由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的，即$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则$W$ 是 $\mathscr{A}$–子空间的充要条件为 $\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_s$ 全属于W.

下面讨论不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系.

1）设 $\mathscr{A}$ 是维线性空间V 的线性变换，W 是V 的 $\mathscr{A}$–子空间. 在W 中取一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$，并且把它扩充成$V$ 的一组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n. \qquad (1)$$

那么，$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵就具有下列形状

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

并且左上角的k 级矩阵 A_1 就是 $\mathscr{A}|W$ 在的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 下的矩阵.

2) 设V 分解成若干个 $\mathscr{A}$–子空间的直和：

线 下 讲 授 新 课	$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s.$$ 在每一个 $\mathcal{A}$–子空间 W_i 中取基 $$\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}\ (i=1,2,\cdots,s)$$ (3) 并把它们合并起来成为 V 的一组基 I .则在这组基下，$\mathcal{A}$ 的矩阵具有准对角形状 $$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \qquad (4)$$ 其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 就是 $\mathcal{A}\|W$ 在基(3)下的矩阵. 反之，如果线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 I 下的矩阵是准对角形（4），则由（3）生成的子空间 W_i 是 $\mathcal{A}$–子空间. 由此可知，矩阵分解为准对角形与空间分解为不变子空间的直和是相当的. 下面应用哈密尔顿-凯莱定理将空间 V 按特征值分解成不变子空间的直和. **定理 12** 设线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，它可分解成一次因式的乘积 $$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$ 则 V 可分解成不变子空间的直和 $$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$ 其中 $V_i=\left\{\xi\mid(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\xi=0,\xi\in V\right\}$ 证明　令 $$f_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$$	

线 下 讲 授 新 课	$=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{r_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ 及 $V_i=f_i(A)V$ 则 V_i 是 $f_i(A)$ 的值域。由本节的例 3 知道 V_i 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。 显然 V_i 满足 $(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}V_i=f(A)V=\{0\}$ 下面来证明 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$ 为此要证明两点，第一，要证 V 中每个向量 α 都可表成 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，$\alpha_i\in V_i, i=1,2,\cdots,s$ 其次，向量的这种表示法是唯一的。 显然 $(f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_s(\lambda))=1$，因此有多项式 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$ 使 $u_1(\lambda)f_1(\lambda)+u_1(\lambda)f_2(\lambda)+\cdots+u_1(\lambda)f_s(\lambda)=1$ 于是 $u_1(A)f_1(A)+u_1(A)f_2(A)+\cdots+u_1(A)f_s(A)=E$ 这样对 V 中每个向量 α 都有 $\alpha=u_1(A)f_1(A)\alpha+u_1(A)f_2(A)\alpha+\cdots+u_1(A)f_s(A)\alpha$ 其中 $u_i(A)f_i(A)\in f_i(A)V=V_i \quad i=1,2,\cdots,s$ 这就证明了第一点。 为证明第二点，设有 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0$ （5） 其中 β_i 满足 $(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\beta_i=0 \quad i=1,2,\cdots,s$ （6）	

现在证明任一个β_i=0

因$(\lambda-\lambda_j)^{r_j} \mid f_i(\lambda)(j\neq i)$，所以$f_i(A)\beta_i$=0

又

（$f_i(\lambda),(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$）$=1$

所以有多项式$u(\lambda)$，$v(\lambda)$使

$$u(\lambda)f_i(\lambda)+v(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}=1$$

于是

$$\beta_i=u(A)f_i(A)\beta_i+v(A)(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\beta_i=0$$

现在设$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=0$

其中$\alpha_i\in V_i$当然　α_i满足

$$(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\alpha_i=0 \quad i=1,2,\cdots,s$$

所以α_i=0，$i=1,2,\cdots,s$

由此可得到第一点中的表示法是唯一的

再设有一向量$\alpha\in(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}$的核，把$\alpha$表示成

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s \quad \alpha_i\in V_i \quad i=1,2,\cdots,s$$

即

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+(\alpha_i-\alpha)+\cdots+\alpha_s=0$$

令$\beta_j=\alpha_i, j\neq i, \beta_i=\alpha_i-\alpha$，则$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_s$是满足（5）和（6）的向量。所以$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_i=\cdots=\beta_s=0$，于是$\alpha=\alpha_i\in V_i$，这就证明了$V_i$是$(A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}$的核，即$V_i=\{\xi \mid (A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\xi=0,\xi\in V\}$

新 知 扩 展	《高等代数选讲》本节课典型例题。 188 页 19.20	开拓学生视野
小 结	掌握不变子空间的概念及其不变子空间的判断方法，深刻理解线性空间分解成不变子空间直和的充要条件。 若线性变换 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是可交换的，则 $\mathcal{B}$ 的核与值都是 $\mathcal{A}$–子空间.因为 $\mathcal{A}$ 的多项式 $f(\mathcal{A})$是和 $\mathcal{A}$ 交换的，所以 $f(\mathcal{A})$的值域与核都是 $\mathcal{A}$–子空间.	
思 考 与 练 习	**例 1** 整个空间V 和零子空间$\{0\}$，对于每个线性变换 $\mathcal{A}$，都是 $\mathcal{A}$–子空间. **例 2** $\mathcal{A}$ 的值域与核都是 $\mathcal{A}$–子空间.	
作 业	222 页 25 题	
阅 读 文 献	1.张禾瑞，郝炳新编：《高等代数》，高等教育出版社。 2.王萼芳：《高等代数》，高等教育出版社。 3.田孝贵等：《高等代数》，高等教育出版社	
教 学 反 思	不变子空间是本章最抽象的概念。需要督促学生线上多预习，学习通微课，做好预习。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§9.1 定义与基本性质</td><td>教学时数</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1. 了解欧氏空间的定义
2. 了解数学家欧几里得的生平
3. 了解度量矩阵的定义</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握欧氏空间，向量的长度，夹角，垂直，线性变换的度量矩阵的概念和度量矩阵的性质。培养学生的逻辑推理能力，抽象思维能力和分析问题、解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">1. 欧几里得生平激励学生勇于探索科技高峰的精神
2. 培养学生严谨的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">欧式空间的定义。</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">欧氏空间的判定及证明。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时）
线上（0.8 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）学习学习通的“欧氏空间的定义解析”（自制）
（4）学习学习通“度量矩阵及 11 题解析”微课（自制）
（5）学习学习通作业题微课（自制）
线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线视频课预习+线上学习通自制微课复习+线下讨论、讲授式相结合）</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学过程</td><td>设计意图</td></tr>
</table>

线 上 教 学 过 程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 3.**录制“欧氏空间的定义解析”微课，上传学习通。** **4．录制“度量矩阵及 11 题解析”微课，上传学习通** **学生：（线上学习内容）** 5. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 6. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 7. **预习学习通“欧氏空间的定义解析”微课（自制）** **8. 学习通“度量矩阵及 11 题解析”微课（自制），复习用** **教师：（线上教学总结）** 9. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 10. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4、5、6、7 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 8. 复习用，加深理解 9、10. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线 下 课 程 导 入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.欧几里得空间的定义与证明 2.度量矩阵 线性空间中向量的运算只有加法和数量乘法，统称为线性运算。如果我们以几何空间为线性空间的具体模型，就会发现向量的度量性质，如长度，夹角等，在线性空间的理论中都没有得到反映。因此，有必要引入度量的概念。 在解析几何中，向量的长度与夹角都是通过向量的内积来表示的，因此，我们在一般的线性空间中引入内积。	检验预习效果 锻炼学生的抽象思维能力
线 下	**（一）欧几里得空间的定义** **定义 1** 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，在 V 上定义了一个二元实	

讲授新课

函数，称为内积，记为$\left(\alpha,\beta\right)$，它具有以下性质：对任意的$\alpha,\beta,\gamma\in V$，

任意的$k\in\mathbf{R}$，

① $\left(\alpha,\beta\right)=\left(\beta,\alpha\right)$；

② $\left(k\alpha,\beta\right)=k\left(\alpha,\beta\right)$；

③ $\left(\alpha+\beta,\gamma\right)=\left(\alpha,\gamma\right)+\left(\beta,\gamma\right)$；

④ $\left(\alpha,\alpha\right)\geq 0$ 当且仅当 $\alpha=0$ 时，$\left(\alpha,\alpha\right)=0$。

这样的线性空间V称为欧几里得空间。

让学生知道如何证明或判定线性空间是欧式空间

线下讲授新课

例 1 在 R^n 里，对于任意两个向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，规定

$$\left(\alpha,\beta\right)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n. \tag{1}$$

容易验证，定义 1 中的公理 1)－4)都成立，因而 R^n 关于这样定义的内积是一个 Euclid 空间.

又若规定

$$\left(\alpha,\beta\right)=x_1y_1+2x_2y_2+\ldots+nx_ny_n.$$

不难验证，这时 R^n 也作成一个 Euclid 空间.

这个例子表明，对同一个向量空间可以引入不同的内积，使它们分别作成 Euclid 空间.

例 2 在实向量空间 $R^{n\times m}$ 中规定

$$\left(A,B\right)=Tr(AB')$$

容易验证它满足定义 1 的四条公理，因此 $R^{n\times m}$ 关于这个内积成为一个 *nm* 维 Euclid 空间.

例题采用讨论式教学，培养学生的合作意识

例 3 设 $C[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上一切连续实函数所成的向量空间．设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，规定

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{2}$$

根据定积分的基本性质可知，内积的公理 1)－4)都成立，因而 $C[a,b]$ 作成一个 Euclid 空间.

例 4 令 *H* 是一切平方和收敛的实数列

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}x_i<\infty$$

所成的集合．在 *H* 中用自然的方式定义加法和数乘运算：

设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$，$k\in R$．规定

$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots),$$
$$k\alpha=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n,\cdots).$$

则 *H* 是实向量空间．又规定

$$\left(\alpha,\beta\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i,$$

则 H 是一个 Euclid 空间，通常叫做 **Hilbert 空间**.

注：① 实数域上同一线性空间 V 中，定义的内积不同，得到不同的欧几里得空间；

② 在欧几里得空间中，向量 $\alpha=\mathbf{0}$ 与 $\left(\alpha,\alpha\right)=0$ 是等价命题，这个命题给出欧几里得空间中证明向量为零向量的方法；

③欧几里得空间 R^n 的内积（如无特殊说明）指的是：对 R^n 中任意二向量

$$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right),\ \beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$$

$$\left(\alpha,\beta\right)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n。$$

线下讲授新课

（二）欧几里得空间的性质

设 V 是一个 Euclid 空间.

性质 1. 由内积的对称性，对应于性质 2)及 3)，我们有

$$(\alpha,k\beta)=(k\beta,\alpha)=k(\beta,\alpha)=k(\alpha,\beta);$$

$$(\alpha,\beta+\gamma)=(\beta+\gamma,\alpha)=(\beta,\alpha)+(\gamma,\alpha)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma).$$

性质 2. 向量 $\alpha=\mathbf{0}$ 的充分必要条件为 $\forall\beta\in V$，有 $\left(\alpha,\beta\right)=0$。

这是因为由定义得到

$$(\alpha,0)=(0,\alpha)=0,\quad \forall\alpha\in V.$$

反过来，令 $\beta=\alpha$ 则有 $(\alpha,\alpha)=0\Rightarrow\alpha=\mathbf{0}$

（三）欧几里得空间的度量性概念

注意到 (α,α) 总是非负实数，因而可以合理地引入向量长度的概念.

定义 2 设 α 是 Euclid 空间 V 的一个向量．非负实数 (α,α) 的算术根 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 叫做 α **的长度**，用符号 $|\alpha|$ 表示，即

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}. \tag{2}$$

这样，Euclid 空间的每一向量都有一个确定的长度．零向量的长度是零，任意非零向量的长度是一个正数.

例 5 设 R^n 是例 1 中关于标准内积的 Euclid 空间．R^n 的向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的长度是

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\cdots+\boldsymbol{x}_n^2}.$$

由长度的定义，对于 Euclid 空间中任意向量 α 和任意实数 k，有

帮助学生理解欧式空间度量性概念和合理性

线下讲授新课

$$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k||\alpha|. \qquad (3)$$

因此，一个实数 k 与一个向量 α 的乘积的长度等于 k 的绝对值与 α 的长度的乘积.

我们把长度是 1 的向量叫做**单位向量**. 由(2)，若 α 是一个非零向量，则 $\alpha/|\alpha|$ 是一个单位向量，叫做 α 的**单位化向量**.

下面证明 Euclid 空间的一个重要不等式.

命题 **1** 设 V 是一个 Euclid 空间，对于 $\forall\alpha,\beta\in V$，有不等式

$$|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta| \qquad (4)$$

当且仅当 α,β 线性相关时，等号才成立。

证 若 α 与 β 线性相关，则 $\alpha=\mathbf{0}$ 或者 $\beta=k\alpha$，无论哪一种情况都有

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

若 α 与 β 线性无关，则对于任意实数 t，都有 $\alpha+t\beta\neq\mathbf{0}$. 于是

$$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)>0.$$

即

$$t^2(\beta,\beta)+2t(\alpha,\beta)+(\alpha,\alpha)>0.$$

这个不等式左边是 t 的一个二次三项式，因而它的判别式必小于零，故

$$(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta). \qquad \square$$

例 6 在 R^n 中. 由不等式(4)推出，对于 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n\in R$，都有不等式

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2). \qquad (5)$$

不等式(5)叫做 Cauchy 不等式.

例 7 考虑例 3 的欧氏空间 $C[a, b]$. 由不等式(4)推出，对于 $\forall f(x), g(x)\in C[a, b]$，有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx}. \qquad (6)$$

不等式(6)叫做 Schwarz 不等式.

Cauchy 不等式和 Schwarz 不等式看起来似乎没有什么共同之处，然而这两个不等式却统一在 Euclid 空间的不等式(4)中. 因此，通常把不等式(4)叫做 **Cauchy－Schwarz 不等式**；有时也称之为 **Cauchy－Буняковский 不等式**.

由不等式(4)，进而定义 Euclid 空间中两个向量的夹角.

定义 3 设 α 与 β 是 Euclid 空间的两个非零向量. α 与 β 的夹角 φ 由以下公式定义：

$$\cos\varphi=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

由不等式(4)，我们有

$$-1\leqslant\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\leqslant1,$$

所以这样定义夹角是合理的. 因此，Euclid 空间中任意两个非零向量有唯一的夹角 φ ($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$).

在 Euclid 空间中定义向量的长度和夹角是解析几何里向量长度和夹

例题考查学以致用

线下讲授新课

角概念的自然推广.

定义 4　设 α,β 是 Euclid 空间 V 的两个向量，若 $(\alpha,\beta)=0$. 则称 α 与 β **正交**，记作 $\alpha\perp\beta$.

由定义可以看出，只有 $\vec{\mathbf{0}}$ 才与自己正交；$\vec{\mathbf{0}}$ 与任意向量正交。

例如，在 Euclid 空间 R^n 中，向量

$$e_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(i)}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

两两正交.

设 α,β 是 Euclid 空间的任意向量，由定理 9.1.1，我们有

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&\le|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2.\end{aligned}$$

由于 $|\alpha+\beta|$ 和 $|\alpha|+|\beta|$ 都是非负实数，所以我们有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|. \tag{7}$$

同时易将熟知的勾股定理推广为

命题 2　设 α,β 是 Euclid 空间的两正交向量，则

$$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$ □

推论 1　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是 Euclid 空间中的两两正交的向量，则

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m|^2=|\boldsymbol{\alpha}_1|^2+|\boldsymbol{\alpha}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{\alpha}_m|^2.$$

在 Euclid 空间中，两个向量 α 与 β 的距离 $d(\alpha,\beta)$ 指的是 $\alpha-\beta$ 的长度 $|\alpha-\beta|$. 根据内积的定义和公式(7)，容易看出，距离具有下列性质：

$$\text{当 } \alpha\ne\beta \text{ 时，} d(\alpha,\beta)>0; \tag{8}$$

$$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha); \tag{9}$$

$$d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta), \tag{10}$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma\in V$ 是 Euclid 空间的任意向量. 不等式(10)称为**三角形不等式**. 在解析几何里，这个不等式的意义就是一个三角形两边之和大于第三边.

将 Euclid 空间中距离的概念普遍化，可以引入

定义 5　设 E 是一个非空集合，d 是 $E\times E$ 到 R 的一个映射. 若对 $\forall x$，y，$z\in E$，都有

1)对称性　$d(x，y)=d(y，x)$；

2)正定性　$d(x，y)\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x=y$；

3)三角形不等式　$d(x，z)\leqslant d(x，y)+d(y，z)$，

则称 d 是一个**距离(或度量)**. 若集合 E 定义了一个距离 d，则称 E 是一个**度量空间**. 把 $d(x，y)$称为 x 与 y 之间的距离.

命题 3　在 Euclid 空间 V 中，对于 $\forall\,\alpha,\beta\in V$，定义

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|.,$$

则 d 是一个距离. 从而 Euclid 空间 V 对于这个距离 d 成为一个度量空间. □

(四)Euclid 空间的度量矩阵

在高等代数中，我们兴趣的是 n 维 Euclid 空间，同学们自然会问，这样空间的内积如何确定？下面我们来回答这个问题.

<table>
<tr>
<td>线
下
讲
授
新
课</td>
<td>

设 V 是一个 n 维 Euclid 空间，在 V 中取一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$\forall\ \alpha,\beta\in V$：$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，$\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i$．于是，$\alpha$ 与 β 的内积为

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\left(\alpha_i,\ \alpha_j\right).$$

令 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$，$i$，$j$=1，2，⋯，$n$，$A=(a_{ij})_{nn}$，则 $A=A'$．因此

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j = X'AY. \qquad (11)$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

分别是 α,β 的坐标，矩阵 A 叫做基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的**度量矩阵**.

上面的讨论表明，在知道了一个基的度量矩阵之后，任意两个向量的内积就可以通过坐标按(11)来计算，因而度量矩阵完全确定了内积.

若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的另外一组基，且由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 C，即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)C.$$

则不难算出，基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的度量矩阵

$$B=(b_{ij})=\ ((\beta_i,\beta_j))_{nn}=C'AC. \qquad (12)$$

这就是说，**不同基的度量矩阵是合同的**.

根据条件 4)，对于非零向量 α，即坐标 $X'\neq(0，0，\cdots，0)$，则

$$(\alpha,\alpha)=X'AX>0.$$

因此，**度量矩阵是正定的**.

反之，给定了任一个 n 阶正定矩阵，按(11)定义 V 的二元实函数就是一个内积，V 关于这个内积就成了一个 Euclid 空间，并且基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵就是 $\boldsymbol{A}$．所以，n 维 Euclid 空间的内积完全由实正定二次型所刻画.

显然，Euclid 空间的子空间在所定义的内积之下也是一个 Euclid 空间.

</td>
<td>帮助学生理解度量矩阵的意义</td>
</tr>
<tr>
<td>课
后
练
习</td>
<td>

设 $\alpha=(a_1,a_2),\ \beta=(b_1,b_2)\in R^2$，$p,q$ 为两个实常数。证明：R^2 对于内积 $\quad\left(\alpha,\beta\right)=pa_1a_2+qb_1b_2$

构成欧式空间的充要条件为 $p>0,q>0$.

</td>
<td>让学生知道如何证明或判定一个数集不是数域</td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>

本节主要学习了：

①欧式空间的定义；② 度量概念—向量长度和夹角；③ 基底的度量矩阵

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

思考与练习	分析欧式空间与解析几何中三维空间 R^3 的联系和区别。	加深对欧式空间性质的理解
作业	P_{389} 1－5;	
教学反思	通过介绍欧氏空间的背景，思政元素的渗透，激发了学生的学习兴趣。本节课教学,从课堂的学习通随堂测验的成绩统计看,取得了不错的效果。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§9.2 标准正交基</td><td>教学时数</td><td>2 学时</td></tr>
<tr><td>线上教学目标</td><td colspan="4">1. 了解标准正交基的定义与性质
2. 了解标准正交基的计算方法</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握标准正交基、正交矩阵的概念；深刻理解标准正交基的性质；熟练掌握施密特正交化方法。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">1. 概念类比教学法体现“事物普遍联系”的哲学思想。
2. 培养学生严谨的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">标准正交基的概念与计算</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">施密特正交化方法。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时）
线上（0.8 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）学习“标准正交基的性质微课”（自制），加强理解。
线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">教学过程</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>线上教学过程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。
3.录制“标准正交基的性质”微课，上传学习通。

学生：（线上学习内容）
4. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
5. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题
6. 学习“标准正交基的性质”微课。

教师：（线上教学总结）
7. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
8. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果
3. 6 对内容加深理解

4、5 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。

7、8. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
<tr><td>线下课程导入</td><td>提问学生：通过线上预习，有哪些收获？
1.标准正交基的定义及性质
2.标准基的计算

Euclid 空间的度量性态可以集中体现在基上，就是这一节要阐述的标准正交基。它较完整地揭示了 n 维 Euclid 空间的结构.</td><td>检验预习效果</td></tr>
<tr><td></td><td>（一）标准正交基的概念

定义 6　Euclid 空间 V 的一组两两正交的非零向量叫做 V 的一个正交向量组.
不难证明，正交向量组是线性无关的，事实上，设正交向量组</td><td>先给出标准正交向量组的概念和性</td></tr>
</table>

线 下 讲 授 新 课	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$， 用 α_i 与等式两端做内积即得 $k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$． 由 $\alpha_i\neq\mathbf{0}$，有 $(\alpha_i,\alpha_i)>0$．从而 $k_i=0$．得证. 这说明在 n 维欧式空间中两两正交的向量不超过 n 个。 若正交向量组的每一个向量都是单位向量，这个正交组就叫做一个**标准正交向量组**. **例 1** 向量 α_1=(0，1，0)，$\alpha_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\alpha_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 构成 R^3 的一个标准正交组，因为 $\lvert\alpha_1\rvert=\lvert\alpha_2\rvert=\lvert\alpha_3\rvert=1$，$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0.$ **例 2** 考虑 Euclid 空间 $C[0,2\pi]$ 中函数组 1，cos*x*，sin*x*，…，cos*nx*，sin*nx*，… (1) 它们构成 *C*[0，2 π]的一个正交组．事实上 $\int_0^{2\pi}1dx=2\pi$，$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}\pi, & 若 m=n,\\ 0, & 若 m\neq n,\end{cases}$ $\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}\pi, & 若 m=n,\\ 0, & 若 m\neq n,\end{cases}$ $\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx dx=\int_0^{2\pi}\cos nx dx=\int_0^{2\pi}\sin nx dx=0.$ 所以 〈1，1〉=2 π，〈cos*nx*，cos*nx*〉=〈sin*nx*，sin*nx*〉= π， 〈1，cos*nx*〉=〈1，sin*nx*〉=0， 〈cos*mx*，cos*nx*〉=〈sin*mx*，sin*nx*〉=〈cos*mx*，sin*nx*〉=0，其中 *m*≠*n*. 把(1)中每一向量除以它的长度，则得 $C[0,2\pi]$ 的一个标准正交组 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots.$ **定义 7** 设 *V* 是一个 *n* 维 Euclid 空间．*n* 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 组成的正交向量组称为 *V* 的一个**正交基**．由单位向量构成的正交基称为**标准正交基**. **例 3** Euclid 空间 R^n 的基 $e_i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)$，*i*=1，2，…，*n*，是 R^n 的一个标准正交基. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 *n* 维 Euclid 空间 *V* 的一个标准正交基， 由定义有 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}.$ 因此，一组基为标准正交基的充分必要条件是：它的度量矩阵为单位阵。 **（二）标准正交基的应用** 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 *n* 维 Euclid 空间 *V* 的一个标准正交基.设 $\forall\alpha\in V$ 可以唯一地写成	质。 标准正交组举例

线 下 讲 授 新 课 线	$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$ x_1，x_2，…，x_n 是 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标．由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基，则 $$(\alpha,\alpha_i)=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_j,\ \alpha_i\right)=x_i. \quad (2)$$ 因此，**向量 α 在一个标准正交基下的第 i 个坐标等于 α 与第 i 个基向量 α_i 的内积**． 其次，令 $\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$，则 $$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=X'Y. \quad (3)$$ 因此，**向量 α 与 β 的内积等于它们在一标准正交基下对应坐标乘积的和**。由此还得到 $$\lvert\alpha\rvert=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}. \quad (4)$$ $$d(\alpha,\beta)=\lvert\alpha-\beta\rvert=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \quad (5)$$ 这些公式都是解析几何里熟知公式的推广．由此表明，在 Euclid 空间中引入标准正交基对于揭示空间结构、简化表述都有好处． **注** 不难证明，若 n 维 Euclid 空间 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足(2)(或(3))，则这个基是 V 的一个标准正交基． **（三）标准正交基的构造** 由上面的讨论，我们自然产生这样的问题：在一个 n 维 Euclid 空间中，标准正交基是不是存在？下面的定理不但给予肯定的回答，而且还给出一种方法，使得我们可以从一个任意基出发，来构造一个标准正交基． **定理 1** 欧式空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基。 **证明** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一正交向量组，我们对 $n-m$ 做数学归纳法。 当 $n-m=0$ 时，它们已是一组正交基。 假设当 $n-m=k$ 时命题成立。也就是说，可以找到向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 称为一组正交基。 现在来看 $n-m=k+1$ 的情形。因为 $m<n$，所以，一定有向量 β 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，做向量 $$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m$$ 这里 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是待定系数。用 α_i 与 α_{m+1} 做内积，得 $$(\alpha_i,\alpha_{m+1})=(\beta,\alpha_i)-k_i(\alpha_i,\alpha_i)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$ 取 $k_i=\dfrac{(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\ (i=1,2,\cdots,m)$，有 $(\alpha_i,\alpha_{m+1})=0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 由 β 的选择可知，$\alpha_{m+1}\neq\vec{\mathbf{0}}$，因此，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 是一正交向量组，根据归纳法假定，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 可以扩充成一正交基。于是定理得证。 定理的证明实际上给出了一个具体的扩充正交向量组的方法。如果我们从一个非零向量出发，按证明中的步骤逐个扩充，最后就得到一组正交基，再单位化，就得到一组标准正交基。 **定理 2** 对于 n 维欧式空间中任一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，都可以找到一	层层递进给出标准正交基的概念。 标准正交基的作用

下 讲 授 新 课	组标准正交基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$ **证明** 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组基，我们来逐个地求出向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$。 首先，可取$\eta_1=\frac{1}{\lvert\alpha_1\rvert}\alpha_1$。一般地，假定已经求出$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$， 它们是单位正交的，具有性质 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\ i=1,2,\cdots,m.$ 下一步求η_{m+1}。 因为$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，所以$\alpha_{m+1}$不能被$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$线性表出。 按定理**9.2.2**证明中的方法，做向量 $$\xi_{m+1}=\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{m+1},\eta_i)\eta_i.$$ 显然，$\xi_{m+1}\neq\mathbf{0}$且$(\xi_{m+1},\eta_i)=0$，$i=1,2,\cdots,m.$ 令$\eta_{m+1}=\xi_{m+1}/\lvert\xi_{m+1}\rvert$. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}$就是一单位正交向量组，同时，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1})=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}).$ 由归纳法原理，定理得证。 □ 注：定理中要求$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$就相当于由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡阵是上三角的。 这两个定理实际上给出了一种方法，使得我们可以从 Euclid 空间的任意一组线性无关的向量出发，得出一个正交组．这个方法叫做 **Gram－Schmidt 正交化方法**，简称**正交化方法**． 设 V 是一个 $n(n>0)$维 Euclid 空间，取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 V 的一个基．利用正交化方法，可以得出 V 的一个正交基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$．再令 $\gamma_i=\beta_i/\lvert\beta_i\rvert$，$i$=1，2，…，$n$． 则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$就是 V 的一个标准正交基．因此得到 **推论 1** 任意 $n(n>0)$维 Euclid 空间一定有正交基，因而有标准正交基． **例 4** 把α_1=(1，1，0，0)，α_2=(1，0，1，0)，α_3=(－1，0，0，1)，α_4=(1，－1，－1，1)变成R^4的标准正交基． **解** 先把它们正交化，得 $\beta_1=\alpha_1$=(1，1，0，0)， $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)$， $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$，	标准正交基的构造方法，培养学生的研究意识

<table>
<tr>
<td>线
下
讲
授
新
课
讲
授
新
课</td>
<td>

$$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=(1,-1,-1,1).$$

再标准化，得其标准正交基为

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\quad \gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right),$$

$$\gamma_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right),\quad \gamma_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

由于标准正交基在 Euclid 空间中占有重要的地位，所以有必要来讨论从一个标准正交基到另一个标准正交基的基变换公式.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的两组标准正交基，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是 $U=(u_{ij})_{nn}$，则

$$\beta_i=\sum_{k=1}^{n}u_{ki}\alpha_k,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

且 $(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$．因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基，所以

$$(\beta_i,\beta_j)=(\sum_{k=1}^{n}u_{ki}\alpha_k,\sum_{l=1}^{n}u_{lj}\alpha_l)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}u_{ki}u_{lj}(\alpha_k,\alpha_l)=\sum_{k=1}^{n}u_{ki}u_{kj}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}u_{ki}u_{kj}=\delta_{ij}.$$

因此，$U'U=E_n$，从而 $UU'=U'U=E_n$.

定义 8　n 级实数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正交矩阵，如果 $\boldsymbol{A'A}=\boldsymbol{E}$.

这样，上面的结论可表述为

定理 3　n 维 Euclid 空间的一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵是一个正交矩阵；反过来，如果第一组基是标准正交基，同时过渡矩阵是正交矩阵，那么第二组基一定也是标准正交基。

最后我们指出，根据逆矩阵的性质，由 $\boldsymbol{A'A}=\boldsymbol{E}$ 即得 $\boldsymbol{AA'}=\boldsymbol{E}$，写出来就是

$$a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+\cdots+a_{in}a_{nj}=\begin{cases}1, i=j;\\0, i\neq j.\end{cases}$$

这是行与行之间的关系，对应的还有列与列之间的关系式，作为练习。

</td>
<td>正交阵的由来</td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>本节讲授了：
①欧式空间的标准正交基及相关概念；
② 从欧式空间的一组基构造标准正交基的 Schmidt 正交化方法；
③ 正交矩阵。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

思考与练习	高代选讲本节精选 例题 P_{364} 1.2 P_{368} 2.1.	巩固所学
作业	268 页 11.12	
教学反思	学生对施密特正交化法掌握较好，但是对施密特正交化法的由来理解不好。 应对办法：变讲授法为探索式教学。	

授课题目	§9.3 同构	教学时数	2 学时
线上教学目标	1. 了解同构的定义 2. 了解同构的证明方法		
教学目标	深刻理解欧氏空间同构的概念和意义；熟练掌握同构的充要条件。		
思政目标	1. 培养学生**严谨的科学精神** 2. 概念类比教学法体现“**事物普遍联系**”的哲学思想		
教学重点	同构的概念。		
教学难点	同构的证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（0.8 学时+1.2 学时） 线上（0.8 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 线下（1.2 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学 （线上学银在线视频课预习+线下讨论、讲授式相结合）

教学过程		设计意图
线上教学过程	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3、4. 通过视

	教师：（线上教学总结） 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.同构的定义 2.同构的证明方法 Euclid 空间是特殊的线性空间，这一节我们来讨论 Euclid 空间的同构问题.	检验预习效果
线下讲授新课	**（一）同构的概念** **定义 8** Euclid 空间 V 与 W 称为是**同构**的，若存在 V 到 W 的一个双射 $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ 满足 1) $\boldsymbol{\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)}$; 2) $\boldsymbol{\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)}$; 3) $\boldsymbol{(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)}$. 这里 $\boldsymbol{\alpha,\beta\in V}$, $\boldsymbol{k\in R}$. 这样的映射 $\boldsymbol{\sigma}$ 称为 V 到 W 的一个同构映射. 由定义立即看出，如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Euclid 空间 V 到 W 的一个同构映射，那么 $\boldsymbol{\sigma}$ 也是 V 到 W 做为线性空间的一个同构映射。因此，同构的欧式空间必然有相同的维数。 **（二）同构的性质和判定** 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组标准正交基，则 V 中每个向量 α 都可表为 $$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$$ 令 $$\sigma(\alpha)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$$ 我们知道，这是 V 到 R^n 的一个双射，并且满足同构映射的要求，因而，	与双射概念联系教学，体现**事物普遍联系**的哲学思想。

	任意 n 维 Euclid 空间都与 $\boldsymbol{R}^n$ 同构. 此外，还可以证明，同构做为欧式空间之间的关系具有反身性、对称性和传递性。 既然每个 n 维 Euclid 空间都与 $\boldsymbol{R}^n$ 同构，按照对称性和传递性即得，任意两个 n 维 Euclid 空间同构。综上，就有 **定理 3**　两个有限维 Euclid 空间同构的充分且必要条件是它们的维数相等. 这个定理说明，从抽象的观点来看，欧式空间的结构完全被它的维数所决定。	
小结	本节讲授了： ① 欧式空间同构的概念； ② 欧式空间同构的判定定理。	
思考与练习	高代选讲对应典型例题	巩固所学
作业	书后 8 题。	
教学反思	教学中注意采用类比式教学，比较线性空间与欧氏空间同构的区别，作为预习作业，起到温故知新的效果。	

授课题目	§9.4 正交变换	教学时数	4 学时
线上教学目标	1. 了解正交变换的定义 2. 了解正交变换的等价条件		
教学目标	通过教学，使学生基本掌握 Euclid 空间正交变换的定义、性质、判别及其初步分类.		
思政目标	培养学生**严谨的科学精神**		
教学重点	正交变换的刻画		
教学难点	正交变换的分类（如第二类正交变换的理解）与相关习题的解决		
教学方法	线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时） 线上（1.6 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）学生**学习“正交矩阵与标准正交基”微课（自制）** **（4）学生学习“正交矩阵的等价刻画”微课（自制）** **（5）学生学习“正交变换保持标准正交基”微课（自制）** 线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学

<table>
<tr><th colspan="2">教学过程</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>线
上
教
学
过
程</td><td>教师：（线上教学准备）
1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。
2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。
3. 录制基础知识点微课“正交矩阵与标准正交基”微课（自制）
4. 学生学习“正交矩阵的等价刻画”微课（自制）
5. 学生学习“正交变换保持标准正交基”微课（自制）

学生：（线上学习内容）
6. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课
并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论
7. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题
8. 学习教师自制 3 个微课。

教师：（线上教学总结）
9. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。
10. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。</td><td>1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果
2. 检验预习效果

3、4、5、8 对课堂内容要点以微课形式回顾，便于学生课后复习。
6、7 线上预习以及检验预习效果。

9、10. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。</td></tr>
<tr><td>线
下
课
程
导
入</td><td>提问学生：通过线上预习，有哪些收获？
1.正交变换的定义
2.正交变换的性质及等价条件

本节转向 Euclid 空间的线性变换．自然地，首先是考察 Euclid 空间中保持内积不变的线性变换．这一节我们就来阐述这类变换．</td><td>检验预习效果</td></tr>
</table>

线下讲授新课

9.4.1 正交变换的概念

定义 9 设 V 是一个 Euclid 空间，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 V 的线性变换．若 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持向量的内积不变，即 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V$，都有

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 V 上的一个**正交变换**.

从定义 1 容易看出，V 的正交变换保持向量的长度不变，保持两个非零向量的夹角不变，保持正交性不变.

定理 4 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一个线性变换，则下列命题等价：

1) $\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换；

2) $\boldsymbol{\sigma}$ 保持长度不变；

3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组标准正交基，则 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也是 V 的标准正交基；

4) $\boldsymbol{\sigma}$ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证 1)$\Leftrightarrow$2) 如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换，则 $(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha)$.

两边开方即得 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$.

反过来，如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持长度不变，那么

$(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha),\quad (\sigma(\beta),\sigma(\beta))=(\beta,\beta),$

$(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta,\alpha+\beta).$

把最后的等式展开即得

$(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))+2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))+(\sigma(\beta),\sigma(\beta))$

$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$.

再利用前两个等式，就有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta).$

也就是说，$\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换.

1)$\Leftrightarrow$3) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组标准正交基，即当 $i=j$ 时，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1$；当 $i\neq j$ 时，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0.\ i,j=1,2,\cdots,n.$

如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换，那么当 $i=j$ 时，$(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=1$；当 $i\neq j$ 时，$(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=0.\ i,j=1,2,\cdots,n.$

这就是说，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 V 的标准正交基. 反过来，如果 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 V 的标准正交基，那么由 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n),$$
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})=y_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+y_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+y_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

从而

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}))=\ x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

因此，$\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换.

3)$\Leftrightarrow$4) 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，即

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$

由假设知：$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也是 V 的标准正交基，故基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的过渡矩阵 A 是正交矩阵. 反过来，如果 A 是正交矩阵，那么 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也是 V 的标准正交基. □

此处循环论证体现逻辑严密性，培养学生**严谨的科学精神**

线下讲授新课

据上，在标准正交基下，n 维 Euclid 空间 V 的正交变换与实 n 阶正交矩阵一一对应．因而可利用正交矩阵将正交变换分类．

注意到 $\boldsymbol{AA'}=\boldsymbol{E}$，取行列式有 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，即正交矩阵的行列式等于 1 或－1．行列式等于 1 的正交变换称为**旋转**，或者称为**第一类**的；行列式等于－1 的正交变换称为**第二类**的．

例 1　在 Euclid 空间 V 中取一个标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$．定义 V 上的一个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=-\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i,\ i=2,\ \cdots,\ n,$$

则 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $A=\mathrm{diag}(-1,\ I_{n-1})$．显然 A 是正交矩阵，因此 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换．由于 $|A|=-1$，因此 $\boldsymbol{\sigma}$ 是第二类的．这个正交变换是关于超平面 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的一个**镜面反射**．

补充：**命题 1**　Euclid 空间 V 上的正交变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 一定是线性变换．

证　先证 $\forall\, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 有

．事实上，

$$\begin{aligned}
&(\sigma(\alpha+\beta)-(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)),\sigma(\alpha+\beta)-(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)))\\
=&|\sigma(\alpha+\beta)|^2-2(\sigma(\alpha+\beta),(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))+|\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)|^2\\
=&|\alpha+\beta|^2-2(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha))-2(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\beta))\\
&+|\sigma(\alpha)|^2+|\sigma(\beta)|^2+2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))\\
=&|\alpha+\beta|^2-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+|\alpha|^2+|\beta|^2+2(\alpha,\beta)\\
=&|\alpha+\beta|^2-2(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+|\alpha+\beta|^2=0.
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持加法运算．同理可证 $\boldsymbol{\sigma}(k\alpha)=k\sigma(\alpha),\ \forall\alpha\in V,\forall k\in P.$ 故 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 V 的一个线性变换．　□

命题 2　Euclid 空间 V 上的正交变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 一定是单射．因此，有限维 Euclid 空间的正交变换是可逆变换．

证　因为 $(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha)$，所以

$$\alpha\in\ker V\Leftrightarrow\sigma(\alpha)=\vec{0}\Leftrightarrow(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\vec{0}.$$

从而 $\ker V=\{\vec{0}\}$．因此 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射．此时，当 $\dim V=n$，则 $\boldsymbol{\sigma}$ 是满射，所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 是双射，故 $\boldsymbol{\sigma}$ 可逆．　□

注意到 Euclid 空间 V 的任一自同构 $\boldsymbol{\sigma}$ 均保持内积不变，因此由命题 2 立得

推论 1　有限维 Euclid 空间 V 的变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正变变换的充分必要条件为 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Euclid 空间 V 的自同构．　□

我们可从另外一个角度来刻画正交变换，即

定理 1　Euclid 空间 V 到自身上的变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正交变换的充要条件为 $\boldsymbol{\sigma}$ 是保持向量的长度不变的线性变换．

证　必要性从定义 9 和命题 1 立即得到．

充分性　设 $\boldsymbol{\sigma}\in L(V)$，且保持向量的长度不变，则 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta,\alpha+\beta).\qquad(2)$$

(2)式的左边、右边分别为

$$\begin{aligned}
(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))&=|\sigma(\alpha)|^2+2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))+|\sigma(\beta)|^2\\
&=|\alpha|^2+2(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))+|\beta|^2
\end{aligned}$$

采用师生讨论、生生讨论，激发学习积极性

	$=\|\alpha\|^2+2(\alpha,\beta)+\|\beta\|^2$. 所以，$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$. 故 σ 是正交变换. □ 显然，Euclid 空间 V 的任两正交变换 σ ，τ 的乘积仍然是正交变换.	
小 结	本节讲授了： ① 正交变换的概念； ② 正交变换的等价条件； ① 正交矩阵的定义及其分类。	
思 考 与 练 习	正交变哈在几何中有何应用？用 Matlab 作图回答。	
作 业	书后 10-18.	
教 学 反 思	正交变换的等价条件的证明采用循环论证，对学生的思维是很好的锻炼。若能安排学生课前分组讨论预习，课上学生讲解效果更好。	

授课题目	§9.5 子空间	教学时数	4 学时
线上预习目标	子空间的概念及性质		
教学目标	理解欧氏空间子空间的概念及其正交关系。		
思政目标	1. 概念类比教学法体现**事物的普遍联系的**哲学思想 2. 培养学生**严密的科学精神**		
教学重点	子空间的正交补。		
教学难点	子空间正交补存在唯一性定理的证明。		
教学方法	线上线下混合式教学（1.6 学时+2.4 学时） 线上（1.6 学时） （1）预习学银在线本节视频课 （2）线上随堂练习或线上预习测试 （3）学生学习本节课作业题微课（自制） 线下（2.4 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式	教学手段	线上线下混合式教学 （线上学银在线视频课预习+线上学习通自制微课复习+线下讨论、讲授式相结合）

	教学过程	设计意图
线 上 教 学 过	**教师：（线上教学准备）** 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 **学生：（线上学习内容）** 3. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习

程	并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 4. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 **教师：（线上教学总结）** 5. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 6. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	效果 3、4. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 5、6. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性。
线下课程导入	**提问学生：通过线上预习，有哪些收获？** 1.子空间的定义 2.子空间正交补的存在唯一性定理 Euclid 空间是特殊的线性空间，这一节我们来讨论 Euclid 空间的子空间的问题.	检验预习效果
线下讲授新课	**定义 10** 设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间.如果对于任意的 $\alpha\in V_1,\beta\in V_2$，恒有 $$(\alpha,\beta)=0$$ 则称 V_1,V_2 为正交的，记为 $V_1\perp V_2$.一个向量 α，如果对于任意的 $\beta\in V_1$，恒有 $$(\alpha,\beta)=0$$ 则称 α 与子空间 V_1 正交，记为 $\alpha\perp V_1$. 因为只有零向量与它自身正交，所以由 $V_1\perp V_2$ 可知 $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$；由 $\alpha\perp V_1,\alpha\in V_1$ 可知 $\alpha=\vec{0}$. **定理 5** 如果子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 两两正交，那么和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和. 证明：设 $\boldsymbol{\alpha}_i\in \boldsymbol{V}_i$，$\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{s}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s=\vec{0}$. 我们来证明 $\boldsymbol{\alpha}_i=\vec{0}$. 事实上，用 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与等式两端做内积，利用正交性得 $$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=0.$$ 从而 $\boldsymbol{\alpha}_i=\vec{0}\ (\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{s})$. 这就是说，和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和。	与一般线性空间的子空间概念类比

	定义 11　子空间V_2称为子空间V_1的一个正交补，如果$V_1 \perp V_2$，并且$V_1 + V_2 = V$. 显然，如果V_2是V_1的正交补，那么V_1也是V_2的正交补. **定理 6**　n维欧氏空间V的每一个子空间V_1都有唯一的正交补. 证明：如果$V_1 = \{\vec{0}\}$，那么它的正交补就是$\boldsymbol{V}$，唯一性就是显然的。 设$V_1 \neq \{\vec{0}\}$. 欧式空间的子空间在所定义的内积之下也是一个欧式空间. 因此，可取V_1的一组正交基$\boldsymbol{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m}$，再将它扩充为$V$的一组正交基$\boldsymbol{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_m}$. 显然子空间$\boldsymbol{L(\varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_m)}$就是$V_1$的正交补。 再来证唯一性。设$\boldsymbol{V_2, V_3}$都是$V_1$的正交补，于是 $$\boldsymbol{V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3}.$$ 令$\boldsymbol{\alpha \in V_2}$，由第二式即有$\boldsymbol{\alpha = \alpha_1 + \alpha_3}$，其中$\boldsymbol{\alpha_1 \in V_1, \alpha_3 \in V_3}$. 因为$\boldsymbol{\alpha \perp \alpha_1}$ 所以 $$\boldsymbol{(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) = 0}.$$ 即$\boldsymbol{\alpha_1 = \vec{0}}$. 由此得知$\boldsymbol{\alpha \in V_3}$，即$\boldsymbol{V_2 \subseteq V_3}$. 同理可证：$\boldsymbol{V_3 \subseteq V_2}$. 因此$\boldsymbol{V_2 = V_3}$.　唯一性得证。 V_1的正交补记为$V_1^{\perp}$，由定义可知 $$维（V_1）+维（V_1^{\perp}）=n.$$ **推论**　$V_1^{\perp}$恰由所有与V_1正交的向量组成. 由分解式 $$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$ 可知，V中任一向量α都可以唯一分解成 $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$ 其中$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_2 \in V_1^{\perp}$. 称α_1为向量α在子空间V_1上的内射影.	学生讲授此定理证明，检验预习效果
小 结	本节讲授了： ① 欧式空间子空间正交和子空间正交补的概念； ② 欧式空间子空间正交补的存在唯一性定理。	
思 考 与 练 习	高代选讲的本节课典型例题 237 页例题 9.7	
作 业	P_{269} 17 1) 4) 、 18 2).	

教学反思	教学中注意采用类比式教学，比较子空间与欧氏空间子空间的异同，作为预习作业，起到温故知新的效果。	

<table>
<tr><td>授课题目</td><td colspan="2">§9.6 实对称矩阵的标准型</td><td>教学时数</td><td>8 学时</td></tr>
<tr><td>线上预习目标</td><td colspan="4">1、 了解对称变换的定义
2、 对称变换的充要条件</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">学生基本掌握对称变换的定义与 n 维 Euclid 空间中对称变换的刻画、化简及其对二次型的应用.</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">培养学生严谨的科学思维</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">对称变换的刻画与化简</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">n 维 Euclid 空间对称变换化简定理的证明与活用.</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>线上线下混合式教学（3.2 学时+4.8 学时）
线上（3.2 学时）
（1）预习学银在线本节视频课
（2）线上随堂练习或线上预习测试
（3）学生学习学习通一系列自制微课，完成对本章的复习。
（4)学生学习学习通作业微课（自制）
线下（4.8 学时）：讨论式（师生讨论）、引导式、示范启发式</td><td>教学手段</td><td colspan="2">线上线下混合式教学
（线上学银在线视频课预习+线上学习通自制微课复习+线下讨论、讲授式相结合）</td></tr>
</table>

教学过程		设计意图
线 上 教 学 过 程	教师：（线上教学准备） 1.学习通“通知”发布学生预习的“学银在线视频课”的内容及预习后回答的问题。 2.为学生编写、设计、发布学习通-活动-随堂测验的预习测验题。 3.录制“用实对称矩阵定义对称变换”微课（自制），上传学习通 4.录制“实对称矩阵的性质”微课（自制），上传学习通 5.录制“实对称矩阵的相似对角化”微课（自制），上传学习通 6.录制“施密特正交化法定理 1 的证明” 微课（自制），上传学习通 7.录制“保夹角的线性变换不一定是正交变换” 微课（自制），上传学习通 8. 录制“保长度不变的变换不一定是正交变换” 微课（自制），上传学习通 9. 录制“保距离的变换不一定是正交变换” 微课（自制），上传学习通 10. 录制“对称变换的定义可以去掉“线性”” 微课（自制），上传学习通 11. 录制“相似与合同的判定” 微课（自制），上传学习通 12. 录制“无限维欧氏空间不一定可逆” 微课（自制），上传学习通 学生：（线上学习内容） 13. 学生学习通预习学银在线本节课的视频课 并在学习通讨论区提问不懂的地方，师生共同讨论 14. 学生学习通-活动-随堂练习，完成本节课预习测验题 教师：（线上教学总结） 15. 通过学习通后台的“统计”了解学生视频课任务点完成情况，督促未完成同学完成，确保任务点完成率达百分之百。 16. 借助“学习通随堂测验”的“成绩统计”，了解学生知识点掌握情况。	1. 学生带着问题学习视频课，使学生把握重点，有的放矢，提高预习效果 2. 检验预习效果 3-12：便于课后复习，巩固复习。 13、14. 通过视频课预习，提前了解本节课内容，加深知识点理解。 15、16. 通过预习测验题的扇形统计图，了解学生的知识点掌握情况，使线下教学更有针对性

线 下 课 程 导 入	提问学生：通过线上预习，有哪些收获？ 1.对称变换的定义 2.对称变换的等价刻画 Euclid 空间的另一类重要的线性变换是对称变换．对称变换的理论是泛函分析中的一个重要内容，在这里，我们只阐述有限维 Euclid 空间的对称变换的一些基本结论．	检验预习效果
线 下 讲 授 新 课	9.5.1　对称变换的刻画 设 V 是一个 n 维 Euclid 空间，$\sigma\in L(V)$，我们提出这样的问题：要使 σ 在 V 一正交基下的矩阵是对角矩阵，问 σ 应该满足什么条件？即 σ 满足什么条件才能使得 V 有一个由 σ 的特征向量所组成的正交基？ 为此，首先 σ 的特征多项式的根必须都是实数，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R}$ 是 σ 的全部特征值(重根按重数计算)，α_i 是属于 λ_i 的一个特征向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 两两正交．不失一般性，可设 $\lvert\alpha_i\rvert=1$，i=1，2，…，n．设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，$\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\in V$，因为 $\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，所以 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_i y_j(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i.$ 同样的计算得到 $(\alpha,\sigma(\beta))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i.$． 因此，对于任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$．为此，我们先讨论对称矩阵的一些性质，并将其归纳为下面几个引理： **引理 1** 设 A 是实对称矩阵，则 A 的特征值皆为实数. 证明：设 λ_0 是 A 的一个特征值，于是有非零向量 $\xi=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 满足 $A\xi=\lambda_0\xi.$ 令 $\bar{\xi}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\vdots\\\bar{x}_n\end{pmatrix}$，其中 $\bar{x}_i$ 是 x_i 的共轭复数，则 $\bar{A}\bar{\xi}=\bar{\lambda}_0\bar{\xi}.$ 考察等式　$\bar{\xi}'(A\xi)=\bar{\xi}'A'\xi=(A\bar{\xi})'\xi=(\bar{A}\bar{\xi})'\xi,$ 其左边为 $\lambda_0\bar{\xi}'\xi$，右边为 $\bar{\lambda}_0\bar{\xi}'\xi$，故 $\lambda_0\bar{\xi}'\xi=\bar{\lambda}_0\bar{\xi}'\xi.$ 又因为 ξ 是非零向量，$\bar{\xi}'\xi=\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2+\cdots+\bar{x}_nx_n\neq 0.$	引导学生讨论推出，培养自主学习能力

线下讲授新课

故 $\boldsymbol{\lambda}_0=\bar{\boldsymbol{\lambda}}_0$，即 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 是一个实数。

对应于实对称矩阵 A，在 n 维欧氏空间 R^n 上定义一个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 如下：

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad(1)$$

显然 $\boldsymbol{\sigma}$ 在标准正交基

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\qquad(2)$$

下的矩阵就是 A.

引理 2 设 A 是实对称矩阵，$\boldsymbol{\sigma}$ 的定义如上，则对任意 $\alpha,\beta\in R^n$，有

$$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta),\qquad(3)$$

或

$$\beta'(A\alpha)=\alpha'A\beta.$$

证明：只证明后一等式即可。实际上

$$\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A\beta})'\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A\beta}.$$

证毕.

等式(3)把实对称阵的特性反映到线性变换上，我们引入

定义 12 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Euclid 空间 V 的一个线性变换．若 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 都有

$$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta),\qquad(3)$$

则称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 V 的一个**对称变换**.

容易看出，对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵. 用对称变换来反映实对称矩阵，一些性质可以看得更清楚.

引理 3 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是对称变换，V_1 是 $\boldsymbol{\sigma}$ –子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{\sigma}$ –子空间.

证明：设 $\alpha\in V_1^{\perp}$，要证 $\sigma(\alpha)\in V_1^{\perp}$，即 $\sigma(\alpha)\perp V_1$. 任取 $\beta\in V_1$，都有 $\sigma(\beta)\in V_1$，因 $\alpha\in V_1^{\perp}$，故 $(\alpha,\sigma(\beta))=0$. 因此

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))=0.$$

即 $\sigma(\alpha)\perp V_1$，$\sigma(\alpha)\in V_1^{\perp}$，$V_1^{\perp}$ 也是 $\sigma-$ 子空间.

引理 4 设 A 是实对称矩阵，则 R^n 中属于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

证明：设 λ,μ 是的两个不同的特征值，α,β 分别是属于 λ,μ 的特征向量：$A\alpha=\lambda\alpha$，$A\beta=\mu\beta$. 定义线性变换 σ 如(1)，于是 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$，$\sigma(\beta)=\mu\beta$. 由 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$ 有

$$\lambda(\alpha,\beta)=\mu(\alpha,\beta).$$

因为 $\lambda\neq\mu$，所以 $(\alpha,\beta)=0$. 即 α,β 正交.

这部分内容自制微课“用实对称矩阵定义对称变换”讲解，使较难的知识点供学生反复回放复习。

线下讲授新课

定理 7 对于任意一个 n 级实对称矩阵 A，都存在一个 n 级正交矩阵 T，使 $T'AT = T^{-1}AT$ 成对角阵。

证明 由于实对称矩阵和对称矩阵的关系，只要证明对称变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 有 n 个特征向量做成标准正交基就行了.

我们对空间的维数 n 作数学归纳法.

n=1 时是明显的.

假设对于 $n-1$ 维 Euclid 空间的对称变换来说定理成立．对于 n 维 Euclid 空间 R^n，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对称变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的属于实特征值 λ_1 的一个特征向量，并且可设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是单位向量．令 $\boldsymbol{W = L(\alpha_1)^{\perp}}$. 则 V_1 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 之下不变， 且维数为 $n-1$. $\boldsymbol{\sigma}\big|_{V_1}$ 是 $W^{\perp}$ 的一个对称变换，并且 $\boldsymbol{\sigma}\big|_{V_1}$ 有 $n-1$ 个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 V 的一组标准正交基，$\boldsymbol{\sigma}$ 在这个基下的矩阵是实对角矩阵. □

此处证明较难，录制了微课在学习通，供学生反复复习。

根据上面的讨论，正交矩阵 T 的求法可以按以下步骤进行：

1. 求出 A 的特征值.设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的全部不同的特征值.

2. 对于每个 λ_i，解齐次方程组

$$(\lambda_i E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

求出一个基础解系，这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基.由这组基出发，按定理 2 的方法求出 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\eta_{i1},\cdots,\eta_{ik_i}$.

3. 因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 两两不同，所以根据这一节引理 4，向量组 $\eta_{11},\cdots,\eta_{1k_1},\cdots,\eta_{r1},\cdots,\eta_{rk_r}$ 还是两两正交的.又根据定理 7 以及第七章 § 5 的讨论，它们的个数就等于空间的维数.因此，它们就构成 R^n 的一组标准正交基，并且也都是 A 的特征向量.这样，正交矩阵 T 也就求出了.

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求一正交矩阵 U，使 $U'AU$ 成对角矩阵.

先求 A 的特征值．由

线下讲授新课

$$|\lambda I_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3),$$

则得 A 的特征值为 1(三重)，－3．

其次，求属于 1 的特征向量．把λ=1 代入

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

求得基础解系为

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,0,0) \\ \alpha_2 = (1,0,1,0) \\ \alpha_3 = (-1,0,0,1) \end{cases},$$

把它正交化，得

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 = (1,1,0,0) \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \alpha_2,\ \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1, 0\right), \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1,\ \beta_1 \rangle}\beta_1 - \dfrac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 1\right). \end{cases}$$

再单位化，得

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \\ \gamma_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, 0\right), \\ \gamma_3 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{3}{\sqrt{12}}\right). \end{cases}$$

这是属于三重特征值 1 的三个标准正交的特征向量．

再求属于－3 的特征向量．把λ=－3 代入(3)，求得基础解系为

(1，－1，－1，1)．

把它单位化，得γ_4=$\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$．

特征向量γ_1，γ_2，γ_3，γ_4 构成 $\mathbf{R}^4$ 的一个标准正交基，所求的正交矩

此例题注意讲解与常规对角化的区别。

线 下 讲 授 新 课	阵为 $U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 且 $$U'AU=\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$ 应该指出，在定理 9.5.4 中，对于正交矩阵 U 我们还可以进一步要求 $$\|U\|=1.$$ 事实上，若求得的正交矩阵 U 的行列式为－1，则取 S=diag(－1，I_{n-1})，令 $U_1=US$，它是正交矩阵，而且$\|U_1\|=\|U\|\ \|S\|=1$．显然$U_1'AU_1=U'AU$. **应用：二次型的正交合同(相似)化简** 将上述方法应用于实二次型，设线性替换 $$\begin{cases} \boldsymbol{x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n} \\ \boldsymbol{x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n} \end{cases}$$ 的矩阵 $C=(c_{ij})_{nn}$ 是正交的，则称之为**正交线性替换**．正交线性替换当然是非退化的．于是，用二次型的语言，定理 9.5.4 可以叙述为 **定理 8** 任意一个实二次型 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}$$ 都可以经过正交线性替换化为平方和 $$\boldsymbol{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2},$$ 其中平方项的系数 $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$ 就是矩阵 A 的全部特征值． □ 最后指出上述化简对二次曲面方程的应用．在直角坐标系下，二次曲面的一般方程是 $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x +2b_2y+2b_3z+d=0 \quad (4)$$ 令 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$ 则(4)可以写成 $$X'AX+2B'X+d=0. \quad (5)$$ 经过转轴，坐标变换公式为	高等代数在解析几何中的应用

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}，\text{或者 } X=CX_1，$$

其中 C 为正交矩阵且$|C|=1$．在新坐标系中，曲面的方程就是

$$X_1'(C'AC)X_1 + 2(B'C)X_1 + d = 0 .$$

根据上面的结果，有行列式为 1 的正交矩阵 C 使

$$C'AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这就是说，可以作一个转轴，使曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1^* x_1 + 2b_2^* y_1 + 2b_3^* z_1 + d = 0 .$$

其中 $(b_1^*，b_2^*，b_3^*) = (b_1，b_2，b_3)C$．这时，再按照 $\lambda_1，\lambda_2，\lambda_3$ 是否为零的情况，作适当的移轴与转轴就可以把曲面的方程化成标准方程．譬如说，当 $\lambda_1，\lambda_2，\lambda_3$ 全不为零时，就作移轴

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \dfrac{b_1^*}{\lambda_1} \\ y_1 = y_2 - \dfrac{b_2^*}{\lambda_2} \\ z_1 = z_2 - \dfrac{b_3^*}{\lambda_3} \end{cases}，$$

则曲面的方程化为

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + d^* = 0，$$

其中 $d^* = d - \dfrac{b_1^{*2}}{\lambda_1} - \dfrac{b_2^{*2}}{\lambda_2} - \dfrac{b_3^{*2}}{\lambda_3}$．因而可利用此化简对二次曲面进行分类．

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>小
结</td>
<td>对称变换的定义与 n 维 Euclid 空间中对称变换的刻画、化简及其对二次型的应用．</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>思
考
与
练
习</td>
<td>高代选讲 240 页 7-12 题。</td>
<td>巩固所学</td>
</tr>
<tr>
<td>作
业</td>
<td>书后 19-23.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

教学反思	本节内容是欧氏空间的重要变换，且难度较大。定理 7 的证明学生理解不好。 应对办法：课前预习微课要督促学生保质保量完成，并将问题在讨论区提出，线下教学更加有针对性。	