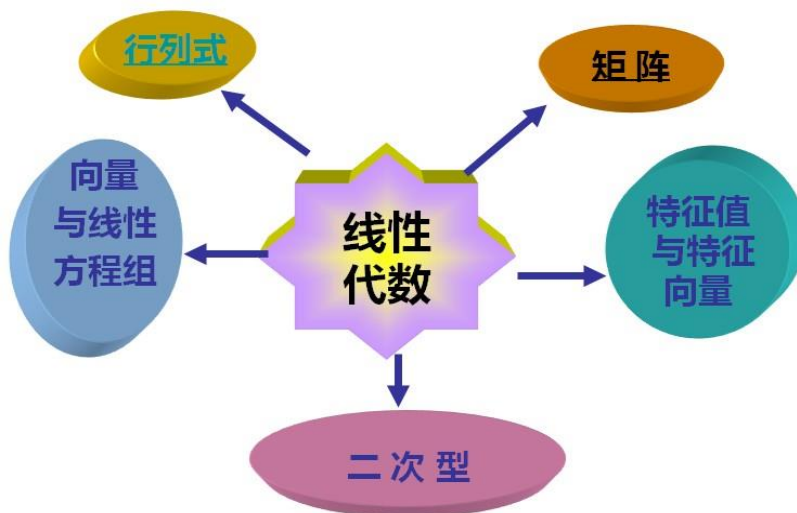


授课题目	绪论	课次：1
教学目标	1. 自我介绍 2. 课程介绍——了解线性代数概况	
教学重点	1. 了解线性代数概况	
教学难点	2. 增强学生的使命感和目标感 3. 对线性代数全局把握	
教学手段	板书与多媒体结合	
教学时数	10 分钟	
教学基本内容		备注
<p>引言</p> <p>一、关于教材</p> 		



二、关于线性代数课程

1. 代数学的一个分支，所谓“线性”，即为一次的；
2. 涉及变量之间线性关系的问题大量存在；
3. 许多非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题；
4. 随着计算机的普及，人们处理多变量、多方程的能力大大提高；
5. 与其他学科相互渗透，是许多学科的基础。

现在终于知道大学时开线性代数是干什么用的了！

2013-08-19 21:14 来自QQ空间

聪明在于学习，天才在于积累。

学而优则用，学而优则创。

由薄到厚，由厚到薄。

三、关于 Matlab

1. Matlab 是美国 Mathworks 公司出品的商业数学软件，具有优秀的数值计算和符号计算能力以及卓越的数据可视化能力；
2. Matlab 是 matrix 和 laboratory 两个词的组合，意为矩阵工程（矩阵实验室）；
3. 在欧美等高校，Matlab 已经成为线性代数、自动控制理论、概率论及数理统计、数字信号处理、时间序列分析、动态系统仿真等高级课程的基本教学工具；
4. 是攻读学位的大学生、硕士生、博士生必须掌握的基本技能。

例如，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值，用 Matlab 计算为

程序设计：

```
>>clear
```

```
>>A=[1 0 2 1;-1 2 2 3;2 3 3 1;0 1 2 1];
```

```
>>det(A)
```

运行结果：

```
ans=
```

```
14
```

四、关于我——自我介绍

五、考核方式

平时成绩 30%、期末机考 70%

六、关于参考书目

《工程数学 线性代数》（第七版） 同济大学数学系 高等教育出版社

学习通资源

七、几点要求

1. 不旷课，坚持就是胜利；
2. 不畏难，敢于挑战；
3. 注意预习、复习；
4. 及时、独立地完成作业；
5. 主动思考、多做练习。

授课题目	§ 1.1 预备知识		课次： 1
教学目标	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 了解排列、逆序数，奇偶排列、对换。</div> <div>(2) 掌握逆序数的概念。</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 培养观察和分析能力：通过排列和逆序数的学习，学生能够观察和分析不同排列的特点，以及逆序数的变化规律，从而培养观察和分析能力。</div> <div>(2) 提升逻辑推理能力：在学习排列和逆序数的过程中，学生需要运用逻辑推理来理解和解决问题，从而提升逻辑推理能力。</div> <div>(3) 增强数学运算能力：通过计算逆序数等数学活动，学生能够锻炼和提高自己的数学运算能力。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 激发学习兴趣：通过排列和逆序数的有趣性质和实际应用，激发学生的学习兴趣，使他们更加热爱数学学习。</div> <div>(2) 培养严谨的数学态度：在学习排列和逆序数的过程中，学生需要严谨地思考、推理和计算，从而培养严谨的数学态度。</div> <div>(3) 增强合作与交流能力：通过小组讨论、合作学习等方式，学生能够增强合作与交流能力，学会与他人共同解决问题。</div>		
教学重点	逆序数的求法		
教学难点	逆序数的求法		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	探究式教学法、讲授法		
教学时数	1 课时		
教 学 过 程			备注
<div>一、复习引入</div> <div>排列的定义</div> <div>二、讲授新课</div> <div>(一) 和号和积号</div> <div>1. 和号</div> <div>如 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 表示 a_1, a_2, \cdots, a_n 的连加和.</div> <div>其中 i 称为下标，下标是虚拟变量，可由任意字母替代，如</div> <div>$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{t=0}^{n-1} a_{t+1} .$</div> <div>在本课程中, 我们还要采用双重和号, 如</div> <div>$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}$</div>			

<div>$+a_{21}+a_{22}+\cdots a_{2n}$$+\cdots\cdots$$+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn},$</div> <div>表示 $m\cdot n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的连加和.</div> <div>2. 积号</div> <div>在学习中还要用到求积的符号, 如 $\prod_{i=1}^n a_i=a_1a_2\cdots a_n$, 表示 $a_1a_2a_3\cdots a_n$ 的连乘积. 再如</div> <div>$\prod_{1\leq j\leq i\leq n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$</div> <div>表示所有可能的 $(x_i-x_j)(i>j)$ 的连乘积.</div> <div>(二) 排列及其性质</div> <div>1. 引例</div> <div>把一些东西按照一定的顺序排成一行就叫做排列.</div> <div>“难, 不, 怕”</div> <div>2. n 级排列定义</div> <div>定义 1: 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个无重复有序数组 i_1,i_2,\cdots,i_n 称为一个 n 级排列.</div> <div>例 1: 456321、123456、654321 是几级排列?</div> <div>6 级</div> <div>练习: 124356789 (10) (11) 是几级排列?</div> <div>例 2: $n(n-1)\cdots 21$ 是几级排列? 共有多少种排列?</div> <div>2. 逆序及逆序数</div> <div>定义 2: 在一个 n 级排列 i_1,i_2,\cdots,i_n 中, 如果较大数 i_s 排在较小数 i_t 之前, 即 $i_s>i_t$, 则称这一对数 i_si_t 构成一个逆序, 一个排列中逆序的总数, 称为它的逆序数. 可表示为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.</div> <div>例 3: 求 $\tau(32514)$.</div> <div>解: $\tau(32514)=5$.</div> <div>3. 偶排列与奇排列</div> <div>定义 3: 如果排列 i_1,i_2,\cdots,i_n 的逆序数为偶数, 则称它为偶排列; 如果排列的逆序数为奇数, 则称它为奇排列.</div> <div>4. 逆序数的计算方法</div> <div>例 4: 试求 $\tau(15432)\quad \tau(n(n-1)\cdots 321)$.</div> <div>解: $\tau(15432)=6$.</div>	<div>课程思政: 王中林: “有时候你摔了一跤, 但绊倒你的很可能不是砖头, 而是一块金子.”</div> <div>两种方法</div>
--	---

<p>在 $n, n-1, \cdots, 3, 2, 1$ 中, 只有逆序, 没有顺序, 故有</p> $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1).$ <p>例 5: 用两种方法求排列 32514 的逆序数.</p> <p>5. 对换</p> <p>定义 4: 排列 i_1, i_2, \cdots, i_n 中, 交换任意两数 i_t 与 i_s 的位置, 称为一次对换, 记为 (i_s, i_t).</p> <p>如: $21534 \xrightarrow{(1,3)} 23514,$</p> <p>$\tau(21534) = 3$, 所以 21534 是奇排列; $\tau(23514) = 4$, 所以 23514 是偶排列;</p> <p>一般地有以下结论.</p> <p>定理 1: 任意一个排列经过一次对换后, 改变其奇偶性.</p> <p>定理 2: 在一个 n 级排列中 ($n \geq 2$), 奇偶排列各占一半.</p> <p>三、巩固练习</p> <p>确定 i 和 j 的值,使得 9 级排列 3972<i>i</i>15<i>j</i>4 成奇排列..</p> <p>四、小结</p> <p>1. 排列;</p> <p>2. 逆序数。</p>	
<p>教学反思:</p> <p>一、教学过程中的亮点与不足</p> <p>1. 亮点:</p> <p>(1) 注重理论与实践相结合, 通过实际例子帮助学生理解抽象概念。</p> <p>(2) 引导学生主动思考, 鼓励他们提出问题并尝试解决, 培养了他们的自主学习能力。</p> <p>2. 不足:</p> <p>(1) 部分学生在计算逆序数时仍感到困难, 需要更多的练习和指导。</p> <p>(2) 在课堂时间分配上, 理论讲解与实践活动的比例需要进一步优化, 以确保学生有足够的时间进行实践操作。</p> <p>(3) 对于一些基础较弱的学生, 缺乏针对性的辅导和支持, 导致他们在学习过程中感到吃力。</p> <p>三、改进措施与建议</p> <p>1. 加强练习: 针对学生在计算逆序数时遇到的困难, 增加相关练习题的数量和难度, 帮助他们熟练掌握计算方法。</p> <p>2. 优化时间分配: 在课前做好充分的准备, 确保课堂节奏紧凑有序, 避免时间浪费。</p> <p>3. 关注个体差异: 对于基础较弱的学生, 提供个性化的辅导和支持, 帮助他们克服学习困难。鼓励学生在 学习过程中相互帮助、共同进步, 形成良好的学习氛围。</p> <p>4. 反思与总结: 在每节课后, 引导学生进行反思和总结, 帮助他们回顾本节课的学习内容, 巩固所学知识。鼓励学生提出问题和 建议, 以便教师及时调整教学策略和方法, 提高教学质量。</p>	

授课题目	§ 1.2 行列式的定义	课次: 1
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 了解二、三阶行列式。</p> <p>(2) 掌握行列式的定义。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高计算能力: 通过行列式的计算练习, 学生应能提高自身的计算能力, 熟练掌握行列式的计算方法。</p> <p>(2) 培养抽象思维能力: 行列式的概念较为抽象, 学生需要通过学习行列式的定义, 培养自身的抽象思维能力, 从而更好地理解和应用行列式。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣: 通过行列式的学习, 学生应能体会到线性代数的魅力和实用性, 从而激发对数学的兴趣和好奇心。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度: 行列式的计算需要严谨的数学态度, 学生应能养成认真、细致、严谨的学习习惯, 注重细节和准确性。</p> <p>(3) 增强自信心: 通过掌握行列式的定义, 学生应能增强自身的自信心, 相信自己能够解决复杂的数学问题。</p>	
教学重点	n 阶行列式的定义	
教学难点	n 阶行列式的定义	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	案例教学法、讲授法	
教学时数	1 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>中学学过解二元一次方程组</p> $\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases}$ <p>如果有解, 它的解完全可由他们的系数 $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ 表示出来。</p> $\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 & (1) \\ b_1x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases} \xrightarrow[(2) \times a_1]{(1) \times b_1} \begin{cases} a_1b_1x + a_2b_2y = c_1b_1 & (3) \\ a_1b_1x + a_1b_2y = a_1c_2 & (4) \end{cases}$ $\stackrel{(4)-(3)}{\Rightarrow} (a_1b_2 - a_2b_1)y = (a_1c_2 - b_1c_1).$ <p>若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 则 $y = \frac{a_1c_2 - b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (2)$</p> <p>同理 $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (3)$</p>		

其中 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 均称为二阶行列式。

二、讲授新课

(一) 二阶、三阶行列式

定义 1: 由 $2^2 = 4$ 个数, 按下列形式排成 2 行 2 列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{记作 } D_2$$

其被定义为一个数: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

例 1 计算二阶行列式的值 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$

例 2 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$

由 $3^3 = 9$ 数组成的 3 行 3 列的 3 阶行列式, 则按下列形式定义为一个数

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

一般 2 阶, 3 阶行列式的计算可按对角线法则得到.

例 3 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

三阶行列式定义的特征:

- (1) 共有 $3! = 6$ 项相加, 其结果是一个数;
- (2) 每项有 3 个数相乘: $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$, 而每个数取自不同行不同列, 即行标固定为 123, 列标则是 1, 2, 3 的某个排列 $p_1p_2p_3$;
- (3) 每项的符号由列标排列 $p_1p_2p_3$ 的奇偶性决定, 即符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$ 。

故三阶行列式可写成

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{3!} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

注意 对角线法则仅适用于 2 阶和 3 阶的行列式, 下面我们介绍 n 阶行列式的定义及其计算方法.

练习 1

(二) n 阶行列式

定义 2 由 n^2 个数排成 n 行 n 列, 写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

称为 n 阶行列式, 其中 a_{ij} 为第 i 行, 第 j 列的元素; 其值为 $n!$ 项, 每一项取自不同行不同列的 n 个元素的连乘积, 即 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 构成一个 n 级排列.

若用 D 表示行列式, 则 $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (2)

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 表示当行标为标准排列时, 对列标的每一种排列

所确定的项求和. (2) 是 (1) 的展开式, 从上面的分析及定义, 可得到 n 阶行列式的另一种定义形式:

定义 3 $D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$,

即把列标写成标准排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列. 由此, 得到行列式更一般的定义形式.

定义 4 $D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$,

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为列标的一个 n 阶排列.

强调: (1) n 阶行列式的定义具有类似的三项特征,

(2) 位置与位置上的元素区别.

特别, 定义一阶行列式 (即 $n=1$) 为: $|a_{11}| = a_{11}$.

若行标不按照自然顺序排列, 如何确定符号?

例4 确定四阶行列式展开式中 $a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$ 的符号

例5 四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 共有多少项? 乘积

$a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 是 D 中的项吗?

解 共有 $4! = 24$ 项. 乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 不是 D 中的一项, 因为其中有两个元素 a_{12} , a_{32} 均取自第2列.

练习: 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

练习2

例3 已知 $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$, 求 x^3 的系数.

解 由行列式的定义, 展开式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 要出现 x^3 的项, 则 a_{ij} 需三项取到 x . 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项, 它们是:

$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ 及 $(-1)^{\tau(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43}$ 即 $x \cdot x \cdot x \cdot 1 = x^3$ 及

$(-1) \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot 2x = -2x^3$

故 x^3 的系数为 $1 + (-2) = -1$.

(三) 特殊行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为对角行列式.

根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. 上三角形行列式

$$\text{称 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 为上三角形行列式.}$$

根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

3. 下三角形行列式

$$\text{称 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 下三角形行列式.}$$

同理可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

4. 副对角行列式

$$\text{称 } D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ 为副对角行列式.}$$

根据行列式的定义得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

三、巩固练习

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

2. $k = ?$ 时, $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0.$

四、小结

1. 行列式的定义;
2. 四种特殊行列式。

五、布置作业

学习通上作业

思考题

教学反思:

一、教学过程中的亮点与不足

1. 亮点:

- (1) 注重理论与实践相结合, 通过实际例子帮助学生理解行列式的定义和性质。
- (2) 引导学生主动思考, 鼓励他们提出问题并尝试解决, 培养了他们的自主学习能力。

2. 不足: 在培养学生问题解决能力方面, 缺乏针对性的练习和指导, 导致学生在面对实际问题时缺乏自信和解决问题的能力。

二、改进措施与建议

1. 加强练习: 增加行列式的计算例题和练习, 让学生在实践中掌握计算方法, 提高计算能力。
2. 优化教学方法: 引导学生通过小组讨论、合作学习等方式, 共同解决问题, 提高问题解决能力。
3. 反思与总结: 在每节课后, 引导学生进行反思和总结, 帮助他们回顾本节课的学习内容, 巩固所学知识。鼓励学生提出问题和建议, 以便教师及时调整教学策略和方法, 提高教学质量。

授课题目	§ 1.3 行列式的性质		课次：2
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 掌握行列式的性质。</p> <p>(2) 会用行列式的性质计算行列式。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 计算能力：学生能够运用行列式的性质及计算方法，准确计算出给定矩阵的行列式值。</p> <p>(2) 推理能力：学生能够根据行列式的性质，对涉及行列式的数学问题进行逻辑推理，得出正确的结论。</p> <p>(3) 应用能力：学生能够将行列式的知识应用于实际问题中，如解决线性方程组、判断矩阵的可逆性等。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 培养对数学的兴趣和好奇心：通过学习行列式的性质，激发学生对数学的兴趣和好奇心，使他们愿意深入探索数学的奥秘。</p> <p>(2) 增强自信心：通过掌握行列式的性质及计算方法，使学生在解决数学问题时更加自信，敢于面对挑战。</p> <p>(3) 培养合作精神：在行列式的学习过程中，鼓励学生进行小组讨论、合作学习，培养他们的团队协作精神和沟通能力。</p>		
教学重点	行列式的性质		
教学难点	用性质计算行列式		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	案例分析法、探究式教学法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> <p>$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$等于主对角线上元素的乘积。</p> <p>二、讲授新课</p> <p>(一) 行列式的性质</p>			举小例子说明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

各个性质
从例子出发引出性质

转置行列式 行列式 D 的行与列对应互换得到的新行列式，记作 D^T ，

若记 D^T 中 (i, j) 位置上的元素为 b_{ij} ，即成立 $b_{ij} = a_{ji}$ 。

性质 1 $D = D^T$ 。

性质 1 表明，对行成立的行列式性质，对列也同时成立。

性质 2 任意对换行列式的两行（或两列）元素，其值变号。

推论 1 两行（或两列）元素对应相同的行列式，其值为零。

$$\text{性质 3} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \cdots & \lambda a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{（给出具$$

体三阶行列式解释）

推论 2 若行列式中某行（或等列）的元素全为零，则行列式的值为零。

推论 3 行列式中若有两行（或两列）对应元素成比例，其值为零。

$$\text{例如} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0。$$

性质 4 行列式成立，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1} + a''_{s1} & a'_{s2} + a''_{s2} & \cdots & a'_{sn} + a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1} & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{s1} & a''_{s2} & \cdots & a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(强调: 只拆一行, 其余行不变) 例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0+1 & 1+1 & -2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论 4 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是 n 个数的和组成, 则此行列式等于 n 个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用性质 3 和性质 4, 又可得到下列性质。

性质 5 $r_t + \lambda r_s$ 来表示这一过程；若是列，则用记号 $c_t + \lambda c_s$ 来表示，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_t + \lambda r_s} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} + \lambda a_{s1} & a_{t2} + \lambda a_{s2} & \cdots & a_{tn} + \lambda a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的值不变，如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 22$ ，第二行的元素加上第三行元

素的两倍（强调，第三行元素本身并不改变值），则有

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 6 - (-1) - 0 - (-12) = 22。$$

（二）行列式的计算

例 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 1 & b-2 \\ b & 1 & b-2 \\ c & 1 & c-2 \end{vmatrix}$ 。

解 $D = \begin{vmatrix} a & 1 & b-2 \\ b & 1 & b-2 \\ c & 1 & c-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & 1 & -2 \\ c & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0。$

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 。

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4 + c_3 + c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$= 6 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_4]{r_1 - r_4} 6 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 2^3 = 48.$$

例 3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -[1 \times 3 \times (-1) \times 4] = 12.$$

例 4 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

解 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_4]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[c_3 + 5c_4]{c_1 - 3c_4} \begin{vmatrix} -5 & 8 & 13 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5(x-4)(x+5)$$

于是原方程为 $5(x-4)(x+5) = 0$, 解得 $x_1 = 4, x_2 = -5$.

例 5 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

解 把行列式的所有列乘 1 都加到第 1 列上得

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a & b \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
 &= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 1 & a & b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a & b \\ 1 & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_2-r_1, r_3-r_1, \dots, r_n-r_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

例 6 计算 $(n+1)$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=0,1,\dots,n).$$

解 这是个“爪型”行列式，为了将其变成上三角形行列式，通常可以把行列式的第 2 列 $\times(-\frac{1}{a_1})$ ，第 3 列 $\times(-\frac{1}{a_2})$ ， \dots 第 $(n+1)$ 列 $\times(-\frac{1}{a_n})$

都加到第 1 列得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n (a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}).$$

三、巩固练习

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ 的值。 (特征: 行之间有公差)

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow{(r_2 + (-1)r_1; r_3 + (-1)r_1; r_4 + (-1)r_1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0。$

2. 证明 $D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明 第一列元素分别加上第二、第三列元素, 再提取第一列的公因子 2

$$D = 2 \times \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(c_2 + (-1)c_1; c_3 + (-1)c_1)}$$

$$2 \times \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(c_1 + c_2; c_1 + c_3)} 2 \times \begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & -b_1 \\ c_2 & -a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

四、小结

1. 行列式的五个性质, 四个推论;

2. 计算行列式的方法:

(1) 化为上三角形行列式;

(2) 计算不同类型的行列式。

五、布置作业

学习通上作业

教学反思:

一、教学亮点与成功经验

1. 理论与实践相结合: 通过引入实际例子, 如利用行列式的性质判断矩阵是否可逆、求解线

性方程组等，使学生深刻体会到行列式在解决实际问题中的应用价值，增强了学习的动力。

2. 多样化的教学方法：采用案例分析等多样化的教学方法，激发了学生的学习兴趣，促进了学生之间的交流与合作，提高了课堂的互动性。

二、教学不足与改进策略

1. 计算能力培养不足：虽然学生在理解行列式的性质方面表现良好，但在具体计算时仍存在问题，如计算错误、计算步骤不清晰等。这可能是由于在计算方面的训练不足导致的。因此，在未来的教学中，我将增加计算题的练习量，加强计算步骤的讲解和示范，提高学生的计算能力。

2. 逻辑推理能力培养不足：部分学生在应用行列式的性质进行逻辑推理时，表现出一定的困难。这可能是由于在逻辑推理方面的训练不够充分导致的。因此，我将设计更多的逻辑推理题目，引导学生逐步掌握逻辑推理的方法，提高他们的逻辑推理能力。

三、未来教学展望

通过本次教学反思，我深刻认识到在行列式的性质教学中，需要关注学生的计算能力、逻辑推理能力以及课堂时间分配等方面的问题。在未来的教学中，我将继续加强计算题的练习和示范，提高学生的计算能力；设计更多的逻辑推理题目，引导学生掌握逻辑推理的方法；合理安排课堂时间，确保理论讲解与实践活动之间的平衡。同时，我还将关注学生的个体差异，提供个性化的辅导和支持，帮助每个学生充分发挥自己的潜力。

授课题目	§ 1.4 行列式展开定理		课次：3
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 掌握行列式展开定理。</p> <p>(2) 会用行列式展开定理计算行列式。</p> <p>(3) 了解范德蒙行列式。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高计算能力：通过学习和练习，学生能够熟练掌握行列式展开定理的计算方法，能够准确、快速地计算出给定行列式的值。</p> <p>(2) 培养逻辑推理能力：在学习行列式展开定理的过程中，学生能够锻炼自己的逻辑推理能力，学会通过观察、分析、归纳等方法，推导出定理的结论。</p> <p>(3) 增强问题解决能力：学生能够运用行列式展开定理解决一些实际问题，如求解线性方程组、判断矩阵的可逆性等，从而增强自己的问题解决能力。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过学习行列式展开定理，学生能够感受到数学的魅力和趣味性，从而激发对数学学习的热情和兴趣。</p> <p>(2) 培养严谨的学习态度：在学习和练习过程中，学生能够养成严谨、认真的学习态度，注重细节和准确性，提高自己的数学素养。</p> <p>(3) 增强自信心：通过掌握行列式展开定理并成功解决一些实际问题，学生能够增强自己的自信心，相信自己有能力学好数学，并在未来的学习和生活中积极应用数学知识。</p>		
教学重点	行列式的性质		
教学难点	用性质计算行列式		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	启发式教学法、讲练结合法、案例分析法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$			

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

二、讲授新课

(一) 余子式与代数余子式

定义 1 (余子式) 在 n 阶行列式 D 中, 划去位置 (i, j) 上元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素, 余下的元素按原顺序组成的 $n-1$ 阶行列式, 称作 $(a_{ij}$ 所在) 位置 (i, j) 的余子式, 记作 M_{ij} ; 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ 为 $(a_{ij}$ 所在) 位置 (i, j) 的代数余子式。

例 1 求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 中的元素 a_{12}, a_{34}, a_{44} 的余子式和

代数余子式.

解 $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -6$

$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$ $A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = -2$

$M_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -13$ $A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot M_{44} = -13$

引理 若行列式 D 的某行 (或某列) 只有一个非零元素, 如 a_{ij} , 则

$$D = a_{ij} A_{ij}.$$

例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{32} A_{32} = -a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

定理 (展开定理) 对于 n 阶行列式 D , 成立

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开})$$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{按第 } j \text{ 列展开})$

证明 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

类似地，可证明 $D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} = \sum_{k=1}^n a_{ki}A_{ki}$.

该定理叫做行列式按行（列）展开定理，也称为行列式的降阶展开式.

推论 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$

或 $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j$

例 2 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$.

解法 1 因为 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{对应项成比例}]{\text{第1, 3列}} 0$

D_1 与 D 的第 1 列元素的代数余子式相同, 所以将 D_1 按第 1 列展开可得 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = 0$.

解法 2 因为 D 的第 3 列元素与 D 的第 1 列元素的代数余子式乘积之和为 0, $3A_{11} + 3A_{21} + 3A_{31} + 3A_{41} = 0$, 所以 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = 0$

注意 在计算行列式时往往不急于展开计算, 通常总是根据行列式的性质尽量把它的其中一行(列)中的更多元素变成零, 然后对这一行(列)展开再加以计算.

例 3 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3]{r_1 + 5r_3} \begin{vmatrix} 16 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

按第二列展开 $\xrightarrow{1 \times (-1)^{3+2}} \begin{vmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_2]{r_1 + 2r_2} (-1) \begin{vmatrix} 20 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

按第二列展开 $\xrightarrow{(-1) \times (-1)^{2+2}} \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -55$

例 4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4 + c_3]{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} & \text{按第三行展开} \\ & \underline{\underline{(-1)^{3+3}}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -11 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{按第三行展开} \\ & \underline{\underline{(-5) \times (-1)^{1+3}}} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = (-5) \times (4 - 12) = 40 \end{aligned}$$

例5 证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (n \geq 2)$$

其中 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ 表示所有因子 $(x_i - x_j) \quad j < i$ 的连乘积, 详见 § 1.1.

证明 用数学归纳法

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, 有 } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (x_i - x_j)$$

即当 $n=2$ 时结论成立.

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式时成立, 即 $D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j)$

要证对 n 阶范德蒙德行列式, 结论也成立.

为此, 设法把 D_n 降阶; 从第 n 行开始, 后行减去前行的 x_1 倍, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{按第一列展开} \\ & \underline{\underline{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

上式是 $(n-1)$ 阶范德蒙德行列式

由假设 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

计算 n 阶行列式, 有时要用到数学归纳法, 但是归纳法的主要步骤是不能省略的.

例 7 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$.

解 将该行列式转置 $D^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 27 & -8 \end{vmatrix}$, 则该行列式为 4

阶范德蒙德行列式.

$$\begin{aligned} D^T &= D(1, -1, 3, -2) = (-1-1)(3-1)(-2-1) \\ &\quad (3+1)(-2+1) \\ &\quad (-2-3) \\ &= 240 \end{aligned}$$

三、巩固练习

计算 n 阶三对角行列式的值,

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

四、小结

1. 行列式展开定理;
2. 范德蒙行列式。

五、布置作业

学习通上作业	
<p>教学反思：</p> <p>1. 加强基础知识复习：在引入行列式展开定理之前，应加强对行列式性质的复习和巩固，确保学生能够牢固掌握基础知识。</p> <p>2. 深化代数余子式理解：在讲解行列式展开定理时，应加强对代数余子式概念的讲解和练习，帮助学生深入理解其含义和计算方法。</p> <p>3. 优化课堂练习设计：应根据学生的学习情况，设计更具针对性和层次性的练习题，以满足不同学生的学习需求。同时，应加强对复杂问题的引导和讲解，帮助学生克服学习困难。</p> <p>4. 加强师生互动与反馈：在教学过程中，应更加注重与学生的互动和交流，及时解答他们的疑惑。同时，应建立有效的反馈机制，了解学生的学习情况和需求，以便及时调整教学策略和方法。</p> <p>5. 激发学习兴趣与动机：应通过引入实际问题和案例、设计有趣的数学游戏等方式，激发学生的学习兴趣 and 动机。同时，应鼓励学生积极参与课堂讨论和实践活动，培养他们的数学素养和创新能力。</p>	

授课题目	§ 1.5 克莱姆法则	课次： 4
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>会用克莱姆法则解方程组</p> <p>2. 能力目标</p> <p>（1）应用克莱姆法则解决问题：学生应能够运用克莱姆法则求解变量和方程数目相等的线性方程组，并理解其应用范围以及局限性。</p> <p>（2）培养数学思维能力：通过克莱姆法则的学习，培养学生的逻辑思维、抽象思维和解决问题的能力，特别是面对复杂数学问题时，能够运用所学知识进行推导和计算。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>（1）激发对数学的兴趣：通过克莱姆法则这一具有历史背景和实际应用价值的数学知识，激发学生对数学的兴趣和热爱。</p> <p>（2）培养探究意识：鼓励学生在学习过程中不断探索、思考和实践，培养其自主学习和终身学习的意识。</p> <p>（3）认识数学的应用价值：通过克莱姆法则的学习，学生能够意识到数学在整个生活中的应用价值，感受数学解决生活实际问题的妙处，从而更加珍视和尊重数学知识。</p>	
教学重点	克莱姆法则	
教学难点	会用克莱姆法则解方程组	
教学手段	板书与多媒体结合，学习通	
教学方法	讲授法、探究式教学法、实例演示法	
教学时数	1 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>中学学过解二元一次方程组</p> $\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases}$ <p>若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，则 $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$， $y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$</p> <p>二、讲授新课</p> <p>（一）线性方程组的基本概念</p> <p>从实际问题导出的线性方程组通常含有很多个未知量和很多个方程，它的一般形式为</p>		

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是未知量, $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 是未知量的系数, b_1, b_2, \dots, b_m 叫做常数项或方程的右端, 这里 m 与 n 未必相等.

线性方程组 (1) 的解是指这样的一组数 k_1, k_2, \dots, k_n , 当用它们依次替换方程组 (1) 中的未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 时, 方程组中的每个方程都成立.

如果 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, 则 (1) 变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) 称为非齐次线性方程组, (2) 叫做 (1) 的对应齐次线性方程组.

显然, $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ 是齐次线性方程组 (2) 的解, 并称为 (2) 的零解

$$\text{当 } m = n \text{ 时, 方程组 (1) 变成 } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

叫做 n 阶线性方程组.

在 n 阶线性方程组 (3) 中, 它的系数 $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 组成的

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{称为方程组 (3) 的系数行列式.}$$

(二) 克莱姆法则

定理 1 (Cramer 法则) 如果 n 元线性方程组的 $D \neq 0$, 则方程组的解存在, 唯一;

且解为

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1, \dots, n$$

其中,

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 分二步:

1) 证明 $x_j = \frac{D_j}{D}$ 是方程组的解, 即代入第 i 个方程, 验证左端等于右端 b_i 即可,

2) 对于方程组的任意解 $x_j = c_j$, $j = 1, \cdots, n$, 都成立 $c_j = \frac{D_j}{D}$, $j = 1, \cdots, n$,

证 1) 把 D_j 按第 j 列展开, 有

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{k=1}^n b_k A_{kj},$$

把 $x_j = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj}$ 代入方程组左端第 i 个方程, 得 (需要讲解和号的运算意义!)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} \right) &= \frac{1}{D} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} b_k A_{kj} = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} \right) \\ &= \frac{1}{D} b_i \cdot D = b_i, \end{aligned}$$

(上面等号是当 $k = i$ 时, $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$ 等于 D ; 而当 $k \neq i$ 时, $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$.)

证 2), 由于 $x_j = c_j$ 是解, 故

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases},$$

n 个等式分别依次乘 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$, 再把 n 个等式的两端相加, 得

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} A_{ij} \right) c_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \right) c_j + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{in} A_{ij} \right) c_n = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}.$$

上式左端只有 c_j 的系数 $\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = D$ ，其余项的系数都为零，而右端

$$\sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = D_j, \text{ 于是}$$

$$Dc_j = D_j. \Rightarrow, c_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1, \dots, n.$$

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & & -x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & -1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -4 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 - 3c_3} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2 - 2c_3} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第三行展开}} 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} = 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解，而

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, & D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0, & D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

由克莱姆法则得, $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 0, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{1}{2}$

显然，齐次方程组的零解无条件存在，问题是齐次方程组是否存在非零解。

由 Cramer 法则,

定理 2 若齐次方程组有非零解, 则系数行列式 $D=0$ 。

定理 3 齐次方程组有非零解的充分必要条件是 $D=0$ 。

例 2 判断方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 \quad \quad - 6x_4 = 0 \\ \quad \quad 2x_2 - x_3 \quad \quad = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$
 是有零解还是有非零解?

解?

解 由于系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + 2c_3} \begin{vmatrix} 2 & -9 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -10 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第三行展开}} (-1) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 - r_3}} \begin{vmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 7 & -12 \\ 1 & -10 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第一列展开}} (-1) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 11 & -11 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} = 55 \neq 0$$

所以方程组只有零解.

例 3 已知 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 k .

解 因为方程组的系数行列式为 $D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2$, 由推论 2

知, 它的系数行列式 $|D|=0$, 即

$$(k+2)(k-1)^2 = 0 \quad \text{故 } k=1 \text{ 或 } k=-2.$$

注意 克莱姆法则只能应用于 n 个未知数 n 个方程并且系数行列式不等于零的线性方程组. 又由于需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 计算量较大, 在求解未知量较多的方程组时, 克拉姆法则不太具有实用价值. 在这一意义上来说, 克拉姆法则仅具有理论上的意义.

三、巩固练习

<p>下列齐次方程组中的参数 λ 为何值时，方程组有非零解。</p> $\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}。$ <p>提示 $D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$</p> <p>四、小结</p> <p>1. 克莱姆法则解方程组的两个条件：</p> <p>（1）方程个数等于未知量个数；</p> <p>（2）系数行列式不等于零。</p> <p>2. 克莱姆法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系。它主要用于理论推导。</p> <p>五、布置作业</p> <p>学习通作业</p>	
<p>教学反思：</p> <p>一、教学内容与方法的反思</p> <p>1. 内容深度与广度的平衡：克莱姆法则是一个重要的数学定理，但同时也是一个相对复杂的概念。在教授过程中，我发现需要找到一个合适的平衡点，既要确保学生理解克莱姆法则的基本原理和证明过程，又要避免陷入过于复杂的数学推导中。因此，我在教学内容上进行了精简和提炼，突出了克莱姆法则的核心概念和解题步骤。</p> <p>2. 教学方法的多样性：为了激发学生的学习兴趣 and 主动性，我采用了多种教学方法，包括讲授法、实例演示法、探究学习法和多媒体辅助教学等。这些方法在一定程度上提高了课堂的互动性和趣味性，但我也意识到，不同学生的学习风格和接受能力存在差异。因此，在未来的教学中，我需要更加注重因材施教，针对不同学生的学习需求提供个性化的指导和支持。</p> <p>二、学生学习情况的反思</p> <p>1. 学生的参与度与理解程度：在课堂上，我通过观察学生的表情、提问和讨论情况，发现大部分学生能够积极参与课堂活动，对克莱姆法则有一定的理解和认识。然而，也有少数学生在理解克莱姆法则的过程中遇到了困难，表现为迷茫、困惑或缺乏自信。这提示我在未来的教学中需要更加关注这些学生的学习状态，及时给予帮助和指导。</p> <p>2. 学生的应用能力：克莱姆法则的一个重要应用是求解线性方程组。在教授过程中，我发现一些学生在应用克莱姆法则解决实际问题时存在困难，如计算行列式时出现错误、替换常数项时混淆等。这表明我在教授克莱姆法则的应用时需要更加注重细节和技巧的指导，提高学生的解题能力和应用能力。</p> <p>三、教学策略与改进的反思</p> <p>1. 加强理论与实践的结合：在未来的教学中，我将更加注重理论与实践的结合，通过更多的实际问题和案例来演示克莱姆法则的应用，使学生更加直观地理解其重要性和实用性。</p> <p>2. 提供多样化的学习资源：为了帮助学生更好地理解和掌握克莱姆法则，我将提供多样化的学习资源，如教学视频、习题集、在线课程等，以满足不同学生的学习需求和兴趣。</p>	

授课题目	第一章复习课		课次： 4
教学目标	复习第一章		
教学重点	行列式的计算		
教学难点	行列式的计算		
教学手段	板书与多媒体结合		
教学时数	1 课时		
教 学 过 程			备注
<div><div>行列式</div><div><div>概念</div><div>不同行不同列元素乘积的代数和</div></div><div><div>性质</div><div><div>转置行列式值不变</div><div>两行互换，行列式变号</div><div>用 k 乘某行，等于用 k 乘此行列式</div><div>某行所有元素都是两元素的和，则可写成两个行列式之和</div><div>某行的 k 倍加到另外一行，行列式的值不变</div></div></div><div><div>计算</div><div><div>用定义</div><div>用性质</div><div>展开式<div><div>$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$ (按第 i 行展开)</div><div>$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$ (按第 j 行展开)</div></div></div></div><div><div>应用</div><div>克莱姆法则</div></div></div></div>			对列均成立
<div>1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$，试求 $A_{41} + A_{42} + 3A_{44}$。</div> <div>2. 计算下列四阶行列式</div> <div><div><div>(1)</div><div>$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$</div><div>;</div></div><div><div>(2)</div><div>$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$</div><div>;</div></div></div>			

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} (a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0);$$

3. 试用克莱姆法则求解线性方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases};$$

4. 问 λ 取何值时下列齐次线性方程组有非零解.

$$(1) \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 = 0 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \end{cases};$$

5. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (1 + \mu)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

由非零解?