

授课题目	§ 2.1 矩阵	课次：5																																																																								
教学目标	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 理解矩阵的概念。</div> <div>(2) 了解单位矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 三角矩阵, 对称矩阵的概念</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 培养逻辑推理能力：通过学习矩阵的概念，学生能够培养自己的逻辑推理能力，学会从已知条件出发，通过逻辑推理得出正确的结论。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的矩阵应用案例和实践活动，激发学生的学习兴趣 and 好奇心，使他们愿意主动探索和学习矩阵的相关知识。</div> <div>(2) 培养严谨的数学态度：在学习矩阵的过程中，学生需要保持严谨的数学态度，认真对待每一个数学概念和运算规则，确保自己的解题过程和结果准确无误。</div>																																																																									
教学重点	矩阵的概念																																																																									
教学难点	矩阵的概念																																																																									
教学手段	板书与多媒体结合、学习通																																																																									
教学方法	讲授法、实例演示法、问题驱动法																																																																									
教学时数	2 课时																																																																									
教 学 过 程		备注																																																																								
<div>一、复习引入</div> <div>引例 某班有 10 名学员，第一学期开设了微积分、英语、线性代数、计算机等 4 门课程，期中考试结束后，班主任手中有如下一张表格。</div> <div>期中考试成绩表</div> <table><tr><th>成绩</th><th>课程名称</th><th>微积分</th><th>英语</th><th>线性代数</th><th>计算机</th></tr><tr><th>学号</th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr><tr><td>1</td><td></td><td>90</td><td>89</td><td>69</td><td>72</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td>70</td><td>90</td><td>80</td><td>69</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>78</td><td>62</td><td>70</td><td>66</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>95</td><td>66</td><td>79</td><td>80</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>70</td><td>70</td><td>80</td><td>82</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>66</td><td>90</td><td>78</td><td>80</td></tr><tr><td>7</td><td></td><td>60</td><td>80</td><td>70</td><td>90</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>50</td><td>70</td><td>88</td><td>60</td></tr><tr><td>9</td><td></td><td>70</td><td>80</td><td>70</td><td>88</td></tr><tr><td>10</td><td></td><td>70</td><td>70</td><td>64</td><td>66</td></tr></table> <div>此表由表头和数字组成。去掉表头，将表中的数字抽象出来，按原来在表格中的顺序排列形成一个 10 行 4 列的矩形数表，用方括号或圆括号括起来，称为矩阵。则上述表格可表示为矩阵：</div>		成绩	课程名称	微积分	英语	线性代数	计算机	学号						1		90	89	69	72	2		70	90	80	69	3		78	62	70	66	4		95	66	79	80	5		70	70	80	82	6		66	90	78	80	7		60	80	70	90	8		50	70	88	60	9		70	80	70	88	10		70	70	64	66	
成绩	课程名称	微积分	英语	线性代数	计算机																																																																					
学号																																																																										
1		90	89	69	72																																																																					
2		70	90	80	69																																																																					
3		78	62	70	66																																																																					
4		95	66	79	80																																																																					
5		70	70	80	82																																																																					
6		66	90	78	80																																																																					
7		60	80	70	90																																																																					
8		50	70	88	60																																																																					
9		70	80	70	88																																																																					
10		70	70	64	66																																																																					

$$\begin{pmatrix} 90 & 89 & 69 & 72 \\ 70 & 90 & 80 & 69 \\ 78 & 62 & 70 & 66 \\ 95 & 66 & 79 & 80 \\ 70 & 70 & 80 & 82 \\ 66 & 90 & 78 & 80 \\ 60 & 80 & 70 & 90 \\ 50 & 70 & 88 & 60 \\ 70 & 80 & 70 & 88 \\ 70 & 70 & 64 & 66 \end{pmatrix}$$

二、讲授新课

定义1（矩阵） 由 $m \times n$ 个实数 a_{ij} 排成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称之为 $m \times n$ 矩阵，位置 (i, j) 上的元素，一般用 a_{ij} 表示（强调两个足

标的意义）。矩阵可简记为 $A_{m \times n}$ 或 $A = \{a_{ij}\}$ 或 $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ 。

例1 含有 n 个未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 、 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

把 a_{ij} 和 b_i 按原顺序可以组成一个 $m \times (n+1)$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

任何一个方程组都可以用这样一个矩阵来描述；反

之，一个矩阵也完全刻划了一个方程组。

方阵 若 $m = n$ ，称 A 为 n 阶（方）矩阵，也可记作 A_n 。（强调矩阵的（主）对角线，）而 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 称之为对角元素；（反主对角线）。

当 $m = n = 1$ 时, 即 $A = (a_{11})$, 此时矩阵退化为一个数 a_{11} .

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称之为同型矩阵。

矩阵相等 若同型矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ 和 $B = \{b_{ij}\}_{m \times n}$ 在对应位置上的元素都相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$,

零矩阵 所有元素都为零的矩阵, 称之为零矩阵。一般记作 O ; 或 $O_{m \times n}$ 。

注意, 不同型的零矩阵是不相等的。

三角矩阵 设 $A = \{a_{ij}\}$ 是 n 阶矩阵。

1) 若 A 的元素满足 $a_{ij} = 0, \forall i > j$, 称 A 是上三角矩阵;

2) 若 A 的元素满足 $a_{ij} = 0, \forall i < j$ 称 A 是下三角矩阵;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 和 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

对角矩阵 若元素满足 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$; 其形状是

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

记作 $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \text{diag}\{a_{ii}\}$ 。

数量矩阵: 对角元素为常数的对角矩阵, 记作 K , 即 $K = \text{diag}(k)$

单位矩阵 对角元素为 1 的对角矩阵, 记作 I 或 I_n (n 阶), 即

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}。$$

零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中所起的作用类似于 0 和 1 在数的运算中所起的作用。

三、巩固练习

<p>已知某方程组对应于下列矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，写出该方程组。</p> <p>四、小结</p> <p>1. 矩阵的定义；</p> <p>2. 几种常见的矩阵。</p> <p>五、布置作业</p> <p>学习通上作业</p>	
<p>教学反思：</p> <p>一、教学内容与方法的反思</p> <p>1. 教学方法的多样性：我采用了讲授法、实例演示法、问题驱动法和多媒体辅助教学等多种方法，以激发学生的学习兴趣 and 主动性。这些方法在一定程度上取得了成功，但我也注意到，有些学生在面对复杂的矩阵运算时仍感到困惑。因此，我需要进一步探索更适合学生理解和掌握的教学方法，如游戏化教学和互动式教学等。</p> <p>二、学生学习情况的反思</p> <p>1. 学生的参与度与理解程度：在课堂上，我通过提问、讨论和练习等方式鼓励学生积极参与。然而，我注意到部分学生在理解矩阵的某些概念，如对称矩阵等。这提示我在未来的教学中需要更加注重这些难点和易混淆点的讲解和练习。</p> <p>2. 学生的应用能力：虽然学生能够通过练习掌握基本的矩阵运算，但在将矩阵应用于实际问题时仍显得力不从心。这可能是因为我在教学中过于注重理论知识的讲解，而忽视了实际应用能力的培养。因此，我需要增加更多与矩阵应用相关的案例和练习题，帮助学生提高应用能力。</p> <p>三、教学策略与改进的反思</p> <p>1. 加强理论与实践的结合：在未来的教学中，我将更加注重理论与实践的结合，通过更多的实际问题和案例来演示矩阵的应用，使学生更加直观地理解其重要性和实用性。同时，我也会鼓励学生自己寻找和解决实际问题，以提高他们的应用能力和创新思维。</p> <p>2. 提供多样化的学习资源：为了帮助学生更好地理解 and 掌握矩阵的概念，我将提供多样化的学习资源，如教学视频、习题集、在线课程等。这些资源可以帮助学生巩固所学知识，提高解题能力，并拓展他们的视野。</p> <p>3. 加强师生互动与反馈：在课堂上，我将更加注重与学生的互动和反馈，鼓励学生积极提问和讨论，及时解答他们的疑问和困惑。同时，我也会定期收集学生的学习反馈和意见，以便及时调整教学策略和方法。</p>	

授课题目	§ 2.2 矩阵的运算（1）	课次：5
教学目标	掌握矩阵的加法,数乘,乘法。	
教学重点	矩阵的运算	
教学难点	矩阵的乘法	
教学手段	板书与多媒体结合	
教学时数	1 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>田忌赛马是一个广为人知的故事.传说战国时期，齐王与其手下大将田忌各有上、中、下三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强.但田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强.有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局者为胜.田忌采用了孙膑的建议：用下等马对付齐王的上等马，用上等马对付齐王的中等马，用中等马对付齐王的下等马.结果三场比赛完后，田忌 1 负 2 胜，最终赢得齐王的千金赌注.</p> <p>事实上这是一个对策问题，在比赛中，齐王和田忌的马匹可以随机出阵，每次比赛双方的胜负情况，要根据双方的对阵情况来定.双方出阵的可能策略为：</p> <p>策略 1（上、中、下）；策略 2（中、上、下）；策略 3（下、中、上）；</p> <p>策略 4（上、下、中）；策略 5（中、下、上）；策略 6（下、上、中）.</p> <p>说明：策略 1（上、中、下）表示按先后出阵的顺序派上等马、中等马、下等马，其他策略解释类似.每场比赛中，如果齐王的马匹三战全胜，则用数 3 表示；如果两胜一负，则用数 1 表示；如果一胜两负，则用数-1 表示.如果齐王和田忌依次使用上面 6 种策略进行比赛，那么齐王的胜、负情况就可以用下面的矩形数表来表示.其中齐王采用的策略用横向行表示，田忌采用的策略用纵向列表示.</p> <div><div>田 忌 策 略</div><div>1 2 3 4 5 6</div></div>		

齐王策略

123456

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

二、讲授新课

(一) 加(减)法

定义 1 (矩阵加法) 设 $A = \{a_{ij}\}$ 和 $B = \{b_{ij}\}$ 是 $m \times n$ 的矩阵, A 与 B 的加法 (或称和), 记作 $A+B$, 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵

$$C = \{c_{ij}\} = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

计算 $A+B$; 若已知 $C = A+B$, 求出 a, b, c, d .

负矩阵 设 $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$, 称矩阵 $-A = \{-a_{ij}\}$ 为矩阵 A 的负矩阵。

矩阵的减法

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

由定义, 容易验证矩阵的加法满足下列运算法则 (其中 A, B, C, O 为同型矩阵)。

- (1) 交换律 $A + B = B + A$
- (2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (3) $A + O = A$
- (4) $A - A = O$

(二) 数乘

定义 2 (矩阵数乘) 数 λ 与矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ 的乘积 (称之为数乘), 记作 λA 或 $A\lambda$, 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵

$$C = \{c_{ij}\} = \lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 A, B, O 是同型矩阵, λ, μ 是数):

(1) 数对矩阵的分配律 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(2) 矩阵对数的分配律 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(3) 结合律 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

(4) $0 \cdot A = O$

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 且有 $2A + X = B - 2X$, 求 X .

解 由 $2A + X = B - 2X$ 得

$$X = \frac{1}{3}(B - 2A)$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(三) 乘法

定义 3 (矩阵乘法) 设 $A = \{a_{ij}\}$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = \{b_{ij}\}$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, A 与 B 的乘法, 记作 AB , 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵 $C = AB = \{c_{ij}\}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m; \quad j=1, 2, \cdots, n).$$

由定义，不难看出（强调）：

（1）只有在左矩阵 A 的列数和右矩阵 B 的行数相等时，才能定义乘法 AB ；

（2）矩阵 $C=AB$ 的行数是 A 的行数，列数则是 B 的列数；

（3）矩阵 $C=AB$ 在 (i, j) 位置上的元素等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j

列对应元素的乘积之和。

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 AB .

解

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 1 & 3 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 3 \\ -2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 2 & -2 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 & -2 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意 这里 BA 是无法计算的。

例4 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, 求 AB 及 BA .

解 $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB 及 AC .

解 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 同样 $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

但是 $B \neq C$

由上述例子可知：

（1）一般情况下，矩阵的乘法不满足交换律。因为 AB 与 BA 可能一个有意义，一个没有意义；也可能二者都有意义，但 $AB \neq BA$ 。当 $AB = BA$ 时，称 A 与 B 是可交换的。

由定义可知, $EA = AE = A$, $BE = EB = B$, 即单位矩阵和任何矩阵都可交换.

(2) 矩阵中存在 $A \neq O$, $B \neq O$, 有 $BA = O$; 反之 $BA = O$, 不一定有 $A = O$ 或 $B = O$.

(3) 矩阵乘法不满足消去律, 即 $AB = AC$, 且 $A \neq O$, 不能导出 $B = C$.

矩阵的乘法运算满足下列的运算律: (假定运算是可行的, λ 是数)

(1) 结合律 $A(BC) = (AB)C$

(2) 分配律 $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$

(3) 数乘结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

例6 证明 n 阶数量矩阵与所有 n 阶方阵都可交换.

证明 设 n 阶数量矩阵为 $K = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$

又设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

则 $KA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} = kA$.

同样可得 $AK = kA$, 所以有 $AK = KA$, 即 n 阶数量矩阵与 n 阶方阵可交换.

矩阵的幂 设 A 是 n 阶矩阵, 定义:

$$A^1 = A, A^2 = AA, \cdots, A^{k+1} = A(A^k),$$

其中, k 是正整数; 特别规定 $A^0 = I$. 由于乘法成立分配律结合律, 有

$$A^{k+l} = A^k A^l, (A^k)^l = A^{kl},$$

但由于不成立交换律, 故一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$.

例7 算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

解 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

假设 $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是由归纳法知, 对于任意正整数 n , 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

三、巩固练习

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求: AB 及 BA .

四、小结

1. 矩阵的加法;
2. 矩阵的数乘;
3. 矩阵的乘法。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

授课题目	§ 2.2 矩阵的运算	课次：6
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 掌握矩阵的加法,数乘,乘法。</p> <p>(2) 理解转置行列式的概念。</p> <p>(3) 掌握方阵的行列式和方阵乘积的行列式。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高矩阵运算能力：通过大量的练习和实践，学生能够熟练掌握矩阵的基本运算，并能够快速准确地解决相关的数学问题。</p> <p>(2) 培养逻辑思维和抽象思维能力：通过学习矩阵的运算，学生能够培养自己的逻辑思维和抽象思维能力，学会从复杂的问题中抽象出数学模型，并运用矩阵运算进行求解。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的矩阵运算案例和实践活动，激发学生的学习兴趣 and 好奇心，使他们愿意主动探索和学习矩阵运算的相关知识。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度：在学习矩阵运算的过程中，学生需要保持严谨的数学态度，认真对待每一个数学概念和运算规则，确保自己的解题过程和结果准确无误。</p>	
教学重点	矩阵的运算、方阵的行列式	
教学难点	矩阵的乘法、方阵的行列式	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	案例教学法、情境教学法、讲授法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>田忌赛马是一个广为人知的故事.传说战国时期，齐王与其手下大将田忌各有上、中、下三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强.但田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强.有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局者为胜.田忌采用了孙臆的建议：用下等马对付齐王的上等马，用上等马对付齐王的中等马，用中等马对付齐王的下等马.结果三场比赛完后，田忌 1 负 2 胜，最终赢得齐王的千金赌注。</p> <p>事实上这是一个对策问题，在比赛中，齐王和田忌的马匹可以随机出阵，每次比赛双方的胜负情况，要根据双方的对阵情况来定.双方出阵的可能策略为：</p> <p>策略 1（上、中、下）；策略 2（中、上、下）；策略 3（下、中、上）；</p> <p>策略 4（上、下、中）；策略 5（中、下、上）；策略 6（下、上、中）。</p> <p>说明：策略 1（上、中、下）表示按先后出阵的顺序派上等马、中等马、下</p>		

等马，其他策略解释类似.每场比赛中，如果齐王的马匹三战全胜，则用数 3 表示；如果两胜一负，则用数 1 表示；如果一胜两负，则用数-1 表示.如果齐王和田忌依次使用上面 6 种策略进行比赛，那么齐王的胜、负情况就可以用下面的矩形数表来表示.其中齐王采用的策略用横向行表示，田忌采用的策略用纵向列表示.

		田 忌 策 略					
		1	2	3	4	5	6
齐 王 策 略	1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$					
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

二、讲授新课

(一) 加（减）法

定义 1 （矩阵加法） 设 $A=\{a_{ij}\}$ 和 $B=\{b_{ij}\}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，A 与 B 的加法（或称和），记作 $A+B$ ，定义为一个 $m\times n$ 的矩阵

$$C=\{c_{ij}\}=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

计算 $A+B$ ；若已知 $C=A+B$ ， 求出 a,b,c,d .

负矩阵 设 $A=\{a_{ij}\}_{m\times n}$ ，称矩阵 $-A=\{-a_{ij}\}$ 为矩阵 A 的负矩阵。

矩阵的减法 $A-B=A+(-B)=$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

由定义, 容易验证矩阵的加法满足下列运算法则 (其中 A, B, C, O 为同型矩阵)。

$$(1) \text{ 交换律 } A + B = B + A$$

$$(2) \text{ 结合律 } (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(3) A + O = A$$

$$(4) A - A = O$$

(二) 数乘

定义 2 (矩阵数乘) 数 λ 与矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ 的乘积 (称之为数乘), 记作 λA 或 $A\lambda$, 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵

$$C = \{c_{ij}\} = \lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 A, B, O 是同型矩阵, λ, μ 是数):

$$(1) \text{ 数对矩阵的分配律 } \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(2) \text{ 矩阵对数的分配律 } (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(3) \text{ 结合律 } (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$(4) \quad 0 \cdot A = O$$

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 且有 $2A + X = B - 2X$, 求 X .

解 由 $2A + X = B - 2X$ 得

$$X = \frac{1}{3}(B - 2A)$$

所以

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(三) 乘法

定义 3 (矩阵乘法) 设 $A = \{a_{ij}\}$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = \{b_{ij}\}$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, A 与 B 的乘法, 记作 AB , 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵 $C = AB = \{c_{ij}\}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m; \quad j=1, 2, \cdots, n).$$

由定义, 不难看出 (强调):

(1) 只有在左矩阵 A 的列数和右矩阵 B 的行数相等时, 才能定义乘法 AB ;

(2) 矩阵 $C=AB$ 的行数是 A 的行数, 列数则是 B 的列数;

(3) 矩阵 $C=AB$ 在 (i, j) 位置上的元素等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和。

例 3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 AB .

解

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 1 & 3 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 3 \\ -2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 2 & -2 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 & -2 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

注意 这里 BA 是无法计算的.

例 4 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, 求 AB 及 BA .

解 $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB 及 AC .

解 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 同样 $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

但是 $B \neq C$

由上述例子可知:

(1) 一般情况下, 矩阵的乘法不满足交换律. 因为 AB 与 BA 可能一个有意义, 一个没有意义; 也可能二者都有意义, 但 $AB \neq BA$. 当 $AB = BA$ 时, 称 A 与 B 是可交换的.

由定义可知, $EA = AE = A$, $BE = EB = B$, 即单位矩阵和任何矩阵都可交换.

(2) 矩阵中存在 $A \neq O$, $B \neq O$, 有 $BA = O$; 反之 $BA = O$, 不一定有 $A = O$ 或 $B = O$.

(3) 矩阵乘法不满足消去律, 即 $AB = AC$, 且 $A \neq O$, 不能导出 $B = C$.

矩阵的乘法运算满足下列的运算律: (假定运算是可行的, λ 是数)

(1) 结合律 $A(BC) = (AB)C$

(2) 分配律 $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$

(3) 数乘结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

例6 证明 n 阶数量矩阵与所有 n 阶方阵都可交换.

证明 设 n 阶数量矩阵为 $K = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$

又设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

则 $KA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} = kA$.

同样可得 $AK = kA$, 所以有 $AK = KA$, 即 n 阶数量矩阵与 n 阶方阵可交换.

矩阵的幂 设 A 是 n 阶矩阵, 定义:

$$A^1 = A, A^2 = AA, \dots, A^{k+1} = A(A^k),$$

其中, k 是正整数; 特别规定 $A^0 = I$. 由于乘法成立分配律结合律, 有

$$A^{k+l} = A^k A^l, (A^k)^l = A^{kl},$$

但由于不成立交换律, 故一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$.

例7 算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

解 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{则 } A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{假设 } A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是由归纳法知, 对于任意正整数 n , 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(四) 转置运算

定义1 (转置矩阵) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

将 A 的行和列对应互换得到的 $n \times m$ 矩阵, 定义为 A 的转置矩阵, 记作 A^T .

由定义可知, $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, 即 A^T 在位置 (i, j) 上的元素是矩阵 A 在位置 (j, i) 上的元素。

例8 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

求 $(AB)^T$, $B^T A^T$ 和 $A^T B^T$ 。

上述例子成立 $(AB)^T = B^T A^T$, 而并不成立 $(AB)^T = A^T B^T$ 。这是转置运算的性质。

矩阵的转置满足下列运算法则:

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$, λ 是数;
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

定义2 (对称矩阵) 设 $A = \{a_{ij}\}$ 是 n 阶矩阵。若其元素满足:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \quad \Leftrightarrow \quad A^T = A,$$

若其元素满足:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \quad \Leftrightarrow \quad A^T = -A,$$

则称 A 是反对称矩阵。此时成立 $a_{ii} = 0 \quad \forall i$ 。

例如 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个对称矩阵, 而 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个反对称矩阵。

显然, 对角矩阵一定是对称矩阵。下面是(反)对称矩阵的一些基本性质。

性质1 设 A, B 为(反)对称矩阵, 则 $A \pm B$ 仍是(反)对称矩阵。

但注意, 此时 AB 不一定是(反)对称矩阵。

例如 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 但 $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不是对称矩阵。

下列性质的证明都可按对称矩阵的定义证得。

性质 2 设 A 、 B 是对称矩阵, 则 AB (或 BA) 是对称矩阵的充分必要条件 $AB = BA$ 。

性质 3 设 A 为 (反) 对称矩阵, 则 A^T , λA 也是 (反) 对称矩阵。

性质 4 对任意方阵 A , 则 $H \equiv \frac{1}{2}(A + A^T)$, $S \equiv \frac{1}{2}(A - A^T)$ 分别是对称矩阵和反对称矩阵; 且 $A = H + S$ 。

(五) 矩阵的行列式

定义 3 (矩阵的行列式) 设 $A = \{a_{ij}\}$ 是 n 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det(A)$ 。

性质 1 $|A^T| = |A|$

性质 2 $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

例如 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, 即 $B = 3A$ 。而 $|A| = 5$, $|B| = 45$,

即

$|B| = |3A| = 3^2 |A| = 9 \times 5 = 45$ 成立。初学者容易犯的一个错是:

$|\lambda A| = \lambda |A|$ 。

性质 3 $|AB| = |A| |B|$ 。

例 9 设 $|A| = 3$, 且 $AB + 2E = 0$, E 为 2 阶单位阵, 求 $|B|$ 。

解 由 $AB + 2E = 0$ 得

$$AB = -2E,$$

$$\therefore |AB| = |-2E|,$$

$$|A| |B| = (-2)^2 |E| = 4,$$

因此 $|B| = \frac{4}{3}$ 。

三、巩固练习

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求: AB 及 BA .

四、小结

- 1. 矩阵的加法;
- 2. 矩阵的数乘;
- 3. 矩阵的乘法;
- 4. 矩阵的转置;
- 5. 矩阵的迹和矩阵的行列式。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

一、教学内容与方法的反思

- 1. 内容安排: 在教授矩阵运算时, 我首先介绍矩阵的加法、减法、乘法 (包括数乘和矩阵乘法)、转置等运算。这样的内容安排有助于学生逐步建立对矩阵运算的理解。然而, 我也意识到, 在介绍矩阵乘法时, 部分内容可能过于抽象, 导致部分学生难以完全理解。未来, 我计划增加更多的实例和图形化展示, 帮助学生更好地理解矩阵乘法的本质。
- 2. 教学方法: 我采用了讲授、演示、练习等多种教学方法。讲授和演示帮助学生理解矩阵运算的基本概念和运算规则, 练习则帮助学生巩固所学知识。然而, 我也注意到, 在某些复杂的运算上, 如行列式计算, 部分学生仍感到困惑。这提示我, 未来需要更多地采用启发式教学和互动式教学, 鼓励学生主动思考和探索。

二、学生学习情况的反思

- 1. 掌握情况: 通过课堂练习和课后作业, 我发现大部分学生能够掌握矩阵的基本运算, 但在处理复杂问题时仍显得力不从心。这可能与我在教学中过于注重理论知识的讲解, 而忽视了实践应用有关。未来, 我计划增加更多与实际应用相关的案例和练习题, 帮助学生提高解决实际问题的能力。
- 2. 学习态度: 在教学过程中, 我注意到部分学生对矩阵运算的学习态度不够积极。这可能与我对学习目标的阐述不够明确, 或者学生对矩阵运算的重要性认识不足有关。未来, 我将在教学中更多地强调矩阵运算在实际问题中的应用, 以及它与其他数学分支的联系, 以激发学生的学习兴趣 and 动力。

三、教学策略与改进的反思

- 1. 加强理论与实践的结合: 未来, 我将更加注重理论与实践的结合, 通过更多的实际问题 and 案例来演示矩阵运算的应用。同时, 我也会鼓励学生自己寻找和解决实际问题, 以提高他们的应用能力和创新思维。
- 2. 采用多样化的教学资源: 为了帮助学生更好地理解和掌握矩阵运算, 我将采用更多的教学资源, 如教学视频、在线课程、习题库等。这些资源可以为学生提供更多的学习机会和练习机会, 帮助他们巩固所学知识。
- 3. 加强师生互动与反馈: 在课堂上, 我将更加注重与学生的互动和反馈。通过提问、讨论和练习等方式, 鼓励学生积极参与课堂活动, 并及时解答他们的疑问和困惑。同时, 我也会定期收集学生的学习反馈和意见, 以便及时调整教学策略和方法。

授课题目	§ 2.3 逆矩阵	课次： 7
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>（1）理解伴随矩阵、逆矩阵的概念。</p> <p>（2）掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充要条件。</p> <p>（3）会用伴随矩阵求逆矩阵。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>（1）提高矩阵运算能力：通过逆矩阵的学习，学生应能够熟练地进行求逆等运算，提高矩阵运算的准确性和速度。</p> <p>（2）培养逻辑思维和抽象思维能力：逆矩阵的学习涉及到较深的数学理论和逻辑推理，学生需要通过理解逆矩阵的定义、性质和求解方法，培养自己的逻辑思维和抽象思维能力。</p> <p>（3）增强问题解决能力：学生应能够运用逆矩阵的知识解决实际问题，这要求学生能够将实际问题抽象为数学问题，并灵活运用逆矩阵的知识进行求解。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>（1）激发学习兴趣：通过生动有趣的逆矩阵案例和实践活动，激发学生的学习兴趣 and 好奇心，使他们愿意主动探索和学习逆矩阵的相关知识。</p> <p>（2）培养严谨的数学态度：在学习逆矩阵的过程中，学生需要保持严谨的数学态度，认真对待每一个数学概念和运算规则，确保自己的解题过程和结果准确无误。</p>	
教学重点	逆矩阵的性质；矩阵可逆的条件	
教学难点	用伴随矩阵求逆矩阵	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、练习反馈法、启发式教学法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>1.复习矩阵的加、减、数乘和乘法；</p> <p>2.矩阵的运算有除法吗？</p> <p>答：没有除法，只有逆矩阵。</p> <p>二、讲授新课</p> <p>（一）伴随矩阵</p> <p>定义 1（伴随矩阵） 设 $A = \{a_{ij}\}$，由行列式 A 的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵</p> $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$		

称之为矩阵 A 的伴随矩阵。

注意到, 伴随矩阵 A^* 在位置 (i, j) 上的元素是矩阵 A 在位置 (j, i) 上的代数余子式。

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 。

$$\text{性质 1} \quad AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

性质 2 当 $|A| \neq 0$ 时, $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明 由 $AA^* = |A|E$ 知 $|A||A^*| = |A|^n$, 因为 $|A| \neq 0$, 所以 $|A^*| = |A|^{n-1}$

例 1 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 A^* .

解 $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$

所以 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

练习 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵。

解 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 。

并 $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E = |A|E$;

注意到 $|A| = 2$ 。同理可验证 $AA^* = |A|E$ 。

(二) 逆矩阵

定义 2 (逆矩阵) 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在矩阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵 B 是矩阵 A 的逆矩阵；并称 A 是**可逆矩阵**（或称矩阵 A 是可逆的）。

例如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵。

方阵可逆的条件

定理 1 对任意方阵 A , 若逆矩阵存在, 必定唯一。

证明 假设矩阵 B 和 C 都是 A 的逆矩阵, 使 $AB = BA = E$,
 $AC = CA = E$

$$\text{则} \quad B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的。

定理 2 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 。

证明 必要性: 由于 A 可逆, 故存在 n 阶方阵 B , 使得 $AB = E$, 两边取行列式得

$$|A||B| = |E| = 1 \neq 0$$

从而有 $|A| \neq 0$ 。

充分性, 由于 $|A| \neq 0$, 由 $AA^* = A^*A = |A|E$,

$$A \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) A = E.$$

则由 $A \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) A = E$ 和逆矩阵定义可知, A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

对于 n 阶方阵 A, B , 只要有 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 A, B 都可逆且互为逆矩阵。

有时称可逆矩阵为**非奇矩阵**; 称不可逆矩阵 (即 $|A| = 0$ 时) 为**奇异矩阵**。

3. 逆矩阵的性质

性质 1 若 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是可逆矩阵, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

性质 2 若 A 是可逆矩阵, 常数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 也是可逆矩阵, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

证明 对于 λA , 取 $B = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, 有 $(\lambda A)B = (\lambda A)(\frac{1}{\lambda} A^{-1}) = AA^{-1} = E$.

性质 3 若 A 、 B 是同阶可逆矩阵, 则 AB 也是可逆矩阵, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明 对于 AB , 取 $C = B^{-1}A^{-1}$, 有

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E.$$

性质 4 若 A 是可逆矩阵, 则 A^T 也是可逆矩阵, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证明 对于 A^T , 取 $B = (A^{-1})^T$, 有 $A^T B = A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E$.

性质 5 若 A 是可逆矩阵, 则 $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$.

性质 6 若 A 是可逆矩阵, 且 $AB = AC$, 则有 $B = C$.

性质 7 若 A 是可逆矩阵, 且 $AB = O$, 则有 $B = O$.

矩阵的负幂 设 $|A| \neq 0$, 定义

$$A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 验证 A 是否可逆, 若可逆求其逆.

解 因为 $|A| = -2 \neq 0$, 故 A 可逆,

又因为 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

所以 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

例 3 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的逆矩阵.

解 因为 $|A| = -7 \neq 0$, 故 A 可逆, 且 $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{31} = -1$, $A_{12} = -2$, $A_{22} = -1$, $A_{32} = 2$, $A_{13} = -6$, $A_{23} = -3$, $A_{33} = -1$, 则伴随矩阵为

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 4 设 n 阶方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 6\mathbf{E} = 0$, 试证 \mathbf{A} 是可逆矩阵, 并求 \mathbf{A}^{-1} .

证明 由 $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 6\mathbf{E} = 0$ 得

$$\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} = 6\mathbf{E}$$

所以

$$\mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{A} - 4\mathbf{E}}{6} \right) = \mathbf{E}$$

由此可知 \mathbf{A} 可逆, 并且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A} - 4\mathbf{E}}{6}$.

例 5 设 \mathbf{A} 是 n 阶可逆矩阵 ($n \geq 2$), \mathbf{A}^* 是 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 证明 $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}$.

证明 由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 得

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \mathbf{E}$$

所以 \mathbf{A}^* 可逆, 且

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}$$

又因为 $(\mathbf{A}^*)(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{E}$ 。

所以 $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}^*|(\mathbf{A}^*)^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}$.

由本例可知, 若方阵 \mathbf{A} 可逆, 则伴随矩阵 \mathbf{A}^* 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}$.

三、巩固练习

判断下列方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -11 & 15 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆,

求其逆阵.

解: $\because |\mathbf{A}| = -2 \neq 0$, $|\mathbf{B}| = 0$, 所以 \mathbf{B} 不可逆, \mathbf{A} 可逆, 并且

$$A^{-1} = -\frac{A^*}{2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

四、小结

- 1. 伴随矩阵;
- 2. 矩阵可逆的条件以及逆矩阵的性质。

五、布置作业

学习通上作业

教学反思:

一、教学内容与方法的反思

- 1. 内容安排：在教授逆矩阵时，我首先介绍了逆矩阵的基本概念，然后逐步深入到逆矩阵的性质、求解方法以及应用。这样的内容安排有助于学生逐步建立对逆矩阵的全面理解。然而，我也意识到，在介绍逆矩阵的求解方法时，部分内容可能过于理论化，导致部分学生难以完全掌握。未来，我计划增加更多的实例和图形化展示，帮助学生更好地理解逆矩阵的求解步骤。
- 2. 教学方法：我采用了讲授、演示、练习等多种教学方法。讲授和演示帮助学生理解逆矩阵的基本概念和性质，练习则帮助学生巩固所学知识。然而，我也注意到，在部分复杂的求解过程中，如使用伴随矩阵法求解逆矩阵时，学生可能感到困惑。这提示我，未来需要更多地采用启发式教学和互动式教学，鼓励学生主动思考和探索逆矩阵的求解方法。

二、学生学习情况的反思

- 1. 掌握情况：通过课堂练习和课后作业，我发现大部分学生能够理解逆矩阵的基本概念和性质，但在求解逆矩阵时仍存在一定的困难。这可能与我在教学中过于注重理论知识的讲解，而忽视了实践应用有关。未来，我计划增加更多与实际应用相关的案例和练习题，帮助学生提高求解逆矩阵的能力。
- 2. 学习态度：在教学过程中，我注意到部分学生对逆矩阵的学习态度不够积极。这可能与逆矩阵的抽象性和复杂性有关，导致部分学生产生畏难情绪。为了激发学生的学习兴趣 and 积极性，我计划在未来的教学中增加更多生动有趣的案例和实践活动，如利用逆矩阵求解线性方程组、进行矩阵分解等。

三、教学策略与改进的反思

- 1. 加强理论与实践的结合：未来，我将更加注重理论与实践的结合，通过更多的实际问题 and 案例来演示逆矩阵的应用。同时，我也会鼓励学生自己寻找和解决实际问题，以提高他们的应用能力和创新思维。
- 2. 采用多样化的教学资源：为了帮助学生更好地理解和掌握逆矩阵，我将采用更多的教学资源，如教学视频、在线课程、习题库等。这些资源可以为学生提供更多的学习机会和练习机会，帮助他们巩固所学知识。
- 3. 加强师生互动与反馈：在课堂上，我将更加注重与学生的互动和反馈。通过提问、讨论和练习等方式，鼓励学生积极参与课堂活动，并及时解答他们的疑问和困惑。同时，我也会定期收集学生的学习反馈和意见，以便及时调整教学策略和方法。
- 4. 关注学生的个体差异：在未来的教学中，我将更加关注学生的个体差异，针对不同学生的学习需求和水平，制定个性化的教学计划和辅导策略。这有助于帮助学生更好地理解和掌握逆矩阵的知识，提高他们的学习效果。

授课题目	§ 2.4 矩阵的分块法	课次：8
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 了解分块矩阵。</p> <p>(2) 掌握分块矩阵的运算法则。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高矩阵运算能力：通过矩阵分块法的学习，学生应能够更高效地处理较大规模的矩阵运算，提高运算速度和准确性。</p> <p>(2) 培养抽象思维和逻辑推理能力：矩阵分块法涉及到较为抽象的数学概念和逻辑推理，学生需要通过理解和应用分块矩阵的运算规则，培养自己的抽象思维和逻辑推理能力。</p> <p>(3) 增强问题解决能力：学生应能够运用矩阵分块法解决实际数学问题，如求解高阶行列式、进行矩阵分解等。这要求学生能够将实际问题抽象为数学问题，并灵活运用矩阵分块法的知识进行求解。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的矩阵分块法案例和实践活动，激发学生的学习兴趣 and 好奇心，使他们愿意主动探索和学习矩阵分块法的相关知识。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度：在学习矩阵分块法的过程中，学生需要保持严谨的数学态度，认真对待每一个数学概念和运算规则，确保自己的解题过程和结果准确无误。</p>	
教学重点	分块矩阵的概念	
教学难点	分块矩阵的运算	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、引导发现教学法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ <p>二、讲授新课</p> <p>把一个矩阵看成是由一些小矩阵组成的，有时会对一些具有特殊结构的矩阵的运算带来方便，如乘法和求逆等。而在具体运算时，则把这些小矩阵看作数一样（按运算规则）进行运算。这种把一个矩阵划分成一些小矩阵，就是所谓的矩阵分块。</p> <p>设</p>		

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

我们对 A 与 B 进行不同形式的划分, 来进行 A 与 B 的基本运算。

划分一、把矩阵 A 与 B 分别划分成 4 个 2×2 小矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

现在我们对矩阵 A, B 进行乘积运算, 把这些小矩阵看作数一样来处理, 按乘法运算规则,

$$AB = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 B_{12} + B_{22} \end{pmatrix}$$

计算出 $A_1 B_{11} + B_{21}$, 和 $A_1 B_{12} + B_{22}$, 可得

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

同样, 我们也可以进行加法、数乘的运算:

$$A + B = \begin{pmatrix} E_2 + B_{11} & B_{12} \\ A_1 + B_{21} & E_2 + B_{22} \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3E_2 & O \\ 3A_1 & 3E_2 \end{pmatrix}.$$

划分二、把矩阵 A 与 B 按下列形式划分成 4 个小矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

按这种划分进行乘法运算, 即

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

此时所有的小矩阵乘积运算都是没有定义的。

划分三、对矩阵 A 的划分不变，而 B 的划分改成为：

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = (-1 \quad -1 \quad 2), \quad B_{22} = (0).$$

此时 AB 的运算也可以按分块形式进行：

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

但此时小矩阵之间的乘法运算并没有给我们带来方便，不如划分一这样简单。

因此在对矩阵进行分块运算时，特别是乘法运算和求逆运算，矩阵的划分一定注意到：

- 1) 矩阵的行列对应，以保证小矩阵的运算可以进行。
- 2) 针对矩阵的结构进行划分，以给运算带来方便。

例1 设 D 是一个 $(t+s)$ 阶矩阵，按下列形式划分成4个小矩阵，

$$D = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix},$$

其中 A 、 B 分别是 s 阶和 t 阶的非奇矩阵，求 D^{-1} 。

解 设 $D^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ ，根据 $DD^{-1} = I$ ，得

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别, 当 $C = O$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

这些结论可以推广到一般情况:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

称为块下三角矩阵, 其逆矩阵 (若存在的话) 一定也是块下三角矩阵。下列形式的矩阵称之为块对角矩阵, 成立

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_p^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵的一种重要划分是所谓的按列划分和按行划分。设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵

把矩阵的每一列看成是一个 $m \times 1$ 的小矩阵 α_j , 于是 A 可以写成

$$A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n);$$

类似地, 把矩阵的每一行看成是一个 $1 \times n$ 的小矩阵 $\overline{\alpha_i}$, 于是 A 可以写成

$$A = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \overline{\alpha_2} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_m} \end{pmatrix}.$$

三、巩固练习

$$\text{设 } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } D^{-1}.$$

四、小结

<div>1. 分块矩阵的概念；</div> <div>2. 分块矩阵的运算。</div> <div>五、布置作业</div> <div>学习通作业</div>	
<div>教学反思：</div> <div>一、教学内容与方法的反思</div> <div>1. 内容安排：我首先介绍了矩阵分块法的基本概念，然后详细讲解了分块矩阵的运算规则和性质。通过实例演示，学生初步理解了矩阵分块法的应用。但在实际教学中，我发现部分学生对分块矩阵的运算规则掌握不够熟练，特别是在处理复杂矩阵时显得力不从心。</div> <div>2. 教学方法：我采用了讲授、演示和练习相结合的教学方法。在课堂上，我通过 PPT 和板书展示矩阵分块法的概念和运算规则，并通过实例演示帮助学生理解。同时，我也安排了一些练习题，让学生在课后进行巩固。然而，我意识到在教学方法上还可以更加多样化，以激发学生的学习兴趣 and 主动性。</div> <div>二、学生学习情况的反思</div> <div>1. 掌握情况：通过课堂表现和课后作业反馈，我发现大部分学生对矩阵分块法的基本概念和运算规则有一定的了解，但在实际应用中仍存在困难。特别是在处理较大规模的矩阵时，学生往往感到无从下手。这可能与我在教学中过于注重理论知识的讲解，而忽视了实践应用有关。</div> <div>2. 学习态度：学生对矩阵分块法的学习态度总体上是积极的，但也有部分学生表现出畏难情绪。他们觉得矩阵分块法较为抽象和复杂，难以掌握。这提示我在未来的教学中需要更加注重学生的个体差异，针对不同学生的学习需求和水平进行个性化教学。</div> <div>三、教学策略与改进的反思</div> <div>1. 加强理论与实践的结合：在未来的教学中，我将更加注重理论与实践的结合。通过引入更多的实际问题和案例，帮助学生理解矩阵分块法的应用背景和实际意义。同时，我也会鼓励学生自己寻找和解决实际问题，以提高他们的应用能力和创新思维。</div> <div>2. 加强练习与反馈：为了帮助学生更好地掌握矩阵分块法的运算规则和性质，我将安排更多的练习题和课后作业。同时，我也会及时收集学生的反馈和疑问，针对问题进行解答和指导。通过不断的练习和反馈，帮助学生巩固所学知识并提高解题能力。</div> <div>3. 关注学生的个体差异：在未来的教学中，我将更加关注学生的个体差异。针对不同学生的学习需求和水平进行个性化教学。对于基础较弱的学生，我会提供更多的辅导和支持；对于学有余力的学生，我会鼓励他们深入探索和研究矩阵分块法的相关知识。</div>	

授课题目	§ 2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵（1）	课次：8
教学目的	1. 了解矩阵的初等变换的概念； 2. 会将矩阵化为行阶梯矩阵	
教学重点	初等变换的方法	
教学难点	初等变换的方法	
教学手段	板书与多媒体结合	
学时数	1 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p style="padding-left: 20px;">引例 --- 线性方程组的 Gauss 消元法</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ <p>线性方程组的矩阵形式：$A X = B$</p> <p>增广矩阵：$\bar{A} = (A,B) = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right)$</p> <p>例 用 Gauss 消元法求解线性方程组</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 19 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -22 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -11 \end{cases}$ <p>解 消元 ： $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 19 \\ x_2 + 7x_3 = -30 \quad (\text{同时对增广矩阵作同样变换}) \\ x_3 = -4 \end{cases}$</p> <p>消元结束。再回代。 可得到方程组的解为 $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -4$</p>		

也可以继续消元：

$$\begin{cases} x_1 & = 3 \\ x_2 & = -2 \\ x_3 & = -4 \end{cases} \quad (\text{同时对增广矩阵作同样变换})$$

对方程组用了以下三种变换：1) 互换两个方程的位置；2) 用一个不等于零的数乘某一个方程；3) 某一个方程加上另一个方程的 k 倍。相应地矩阵也有上述三种变换。

施行这三种变换不会改变方程组的同解性。

二、讲授新课

(一) 矩阵的初等变换

定义 1 (初等变换) 矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换：

- (1) 对换：互换矩阵中两行(列)的位置；
- (2) 倍乘：用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)；
- (3) 倍加：矩阵的某一行(列)元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍；

(注意：另一行的元素并没有改变)

例 1 用初等行变换化矩阵 A 为上三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵是指满足下列两个条件的矩阵：

- (1) 矩阵的零行(元素全为零的行)全部位于非零行的下方；
- (2) 各个非零行的左起第一个非零元素的列序数由上至下严格递增。

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个行阶梯形矩阵，下列矩阵则不是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵：若行阶梯形矩阵还满足

- (1) 所有非零行的左起第一个非零元素均为 1；
- (2) 各个非零行的左起第一个非零元素所在的列的其余元素都是零。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 还可进一步通过行初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1 任意一个非零矩阵总可经过**行**初等变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵。

证明

例 2 化下列矩阵为行阶梯形矩阵，及行最简形矩阵：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

三、巩固练习

用初等变换把矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 化成行阶梯形进而化成标准形。

四、小结

<div>1. 矩阵的初等变换；</div> <div>2. 行阶梯形矩阵和行最简形矩阵。</div> <div>五、布置作业</div> <div>学习通作业</div>	
<div>教学反思：</div>	

[illegible]

增广矩阵: $\bar{A} = (A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

例 用 Gauss 消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 19 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -22 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -11 \end{cases}$$

解 消元: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 19 \\ x_2 + 7x_3 = -30 \\ x_3 = -4 \end{cases}$ (同时对增广矩阵作同样变换)

消元结束。再回代。 可得到方程组的解为 $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -4$

也可以继续消元: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -4 \end{cases}$ (同时对增广矩阵作同样变换)

对方程组用了以下三种变换: 1) 互换两个方程的位置; 2) 用一个不等于零的数乘某一个方程; 3) 某一个方程加上另一个方程的 k 倍。相应地矩阵也有上述三种变换。

施行这三种变换不会改变方程组的同解性。

二、讲授新课

(一) 矩阵的初等变换

定义 1 (初等变换) 矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换:

- (1) 对换: 互换矩阵中两行(列)的位置;
- (2) 倍乘: 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列);
- (3) 倍加: 矩阵的某一行(列)元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍;

(注意: 另一行的元素并没有改变)

例 1 用初等行变换化矩阵 A 为上三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵是指满足下列两个条件的矩阵：

- (1) 矩阵的零行（元素全为零的行）全部位于非零行的下方；
- (2) 各个非零行的左起第一个非零元素的列序数由上至下严格递增。

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个行阶梯形矩阵，下列矩阵则不是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵：若行阶梯形矩阵还满足

- (1) 所有非零行的左起第一个非零元素均为 1；
- (2) 各个非零行的左起第一个非零元素所在的列的其余元素都是零。

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 还可进一步通过行初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1 任意一个非零矩阵总可经过行初等变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵。

证明

例2 化下列矩阵为行阶梯形矩阵, 及行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

(二) 初等矩阵

定义1 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵(或初等方阵).

三种变换对应着三种初等矩阵:

(1) 对调两行(两列).

例如对换 E 中的 i, j 两行(两列), 得到初等矩阵

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix}$$

$i\text{列} \quad j\text{列}$

(2) 用数 $k \neq 0$ 乘某行(列).

例如用数 $k \neq 0$ 乘 E 的第 i 行(或第 i 列), 得到初等矩阵

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$i\text{列}$

(3) 用数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去.

例如用数 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上去(或用数 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上去), 得初等矩阵

$$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \text{行} \\ \\ j \text{行} \end{matrix}$$

$i \text{ 列} \quad j \text{ 列}$

例如

$$E(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(2(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(13(-4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

不难证明, 初等矩阵都是可逆的, 其逆矩阵仍是同类型的初等矩阵.

(1) 因变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身, 所以

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j);$$

(2) 因变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$, 所以

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}));$$

(3) 因变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$, 所以

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)).$$

定理 1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对 A 作一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 作一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘相应的 n 阶初等矩阵. (证明略)

推论 1 可逆矩阵 A 一定可以经过有限次初等变换化为单位矩阵.

定理 2 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 能表示为有限个 n 阶初等矩阵的乘积,

即 $A = P_1 \cdots P_t$ (P_1, \dots, P_t 为初等矩阵).

证明 必要性: 因为 A 是可逆矩阵, 所以存在初等矩阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_t^{-1}$, 使得

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E,$$

又

$$P_1 P_2 \cdots P_t P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = P_1 P_2 \cdots P_t E,$$

所以

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t E = P_1 P_2 \cdots P_t ,$$

P_1, P_2, \dots, P_t 都是初等矩阵。

充分性：设 $A = P_1 P_2 \cdots P_t$, (P_1, P_2, \dots, P_t 为初等矩阵),

因初等矩阵可逆, 有限个初等矩阵的积仍可逆, 故 A 可逆.

推论 2 可逆方阵必与同阶单位矩阵等价.

推论 3 两个 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使

$$PAQ = B.$$

综合上面的讨论, 可以得到一种求逆矩阵的方法.

(三) 初等变换法求逆矩阵

设 A 是 n 阶可逆方阵, 由定理 3, 则有 $A = P_1 P_2 \cdots P_t$, 这里 P_1, P_2, \dots, P_t 都是初等矩阵, 所以

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} P_1 P_2 \cdots P_t = E.$$

它表明, n 阶可逆方阵 A 经过一系列的初等变换可变成单位方阵 E .

两端同时右乘 A^{-1} , 有

$$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E = A^{-1}.$$

$P_t^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$ 都是初等矩阵.

它表明, 当 n 阶可逆方阵 A 经过一系列的初等变换变成单位矩阵 E 的同时, n 阶单位矩阵 E 经过这同一系列初等行变换变成 A^{-1} .

由此得到一个用初等变换求逆矩阵的方法, 即用 A 和 E 作一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(A:E)$, 然后对其进行初等行变换, 当把左边的 A 化为 E 时, 同时右边的 E 就化为 A^{-1} .

当 A 为可逆矩阵时, 用初等行变换求逆矩阵的方法可简记为

$$(A:E) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E:A^{-1}).$$

若进行初等行变换, 其中的 A 不能化为 E , 则说明 A 不可逆.

例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

判断 A 是否可逆; 若可逆, 求 A^{-1} .

$$\text{解 } (A:E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_1]{\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $|A|=0$, 故 A 不可逆, 即 A^{-1} 不存在.

注意: 此例说明, 在用初等变换求逆矩阵的过程中既可看出矩阵是否可逆, 而不必先去判断.

$$\text{例 4 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 用初等变换法求 } A^{-1}.$$

解

$$(A:E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{\begin{matrix} r_1+3r_3 \\ (-1) \times r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

例5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$, 试用初等变换法求 A^{-1} .

解 $(A:E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow[r_i - ar_{i-1}, i=4,3,2]{r_i - ar_{i-1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array} \right)$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

注意: 对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 实施初等列变换求矩阵 A 的逆, 当 A 化成 E 时, E 就化成了 A^{-1} ,

$$\text{即} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

初等变换法求解矩阵方程

在矩阵方程 $AX = B$ 中, 如果 A 是可逆矩阵, 则有惟一解 $X = A^{-1}B$.

若构造矩阵 $(A:B)$, 由上面讨论可知, 当对其作初等行变换将 A 化为 E 时, B 就化成 $X = A^{-1}B$, 即

$$(A:B) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E:A^{-1}B).$$

例6 解矩阵方程 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

解 由 $AX = B$ 得 $X = A^{-1}B$,

$$(A:B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -12 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

所以

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -9 & -8 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

例7 解矩阵方程 $\mathbf{AX} = 2\mathbf{X} + \mathbf{B}$ ，其中， $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 将矩阵方程 $\mathbf{AX} = 2\mathbf{X} + \mathbf{B}$ 化为

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E} : \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[(-1) \cdot r_3]{(-1) \cdot r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

所以

$$X = (A - 2E)^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意: 对 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 实施初等列变换解矩阵方程 $XA = B$, 当 A 化成 E 时, B

就化成了 BA^{-1} , 即

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.$$

例8 解矩阵方程 $XA = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

解 方法一

由 $XA = B$ 得 $X = BA^{-1}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_1 - c_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \\ -1 & 11 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_1 - c_2 \\ c_3 - 2c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 - c_3 \\ (-1) \cdot c_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

方法二

因 $|A| = 1 \neq 0$, 故 A 可逆. 于是由 $XA = B$ 得 $X = BA^{-1}$.

因 $(XA)^T = B^T \Rightarrow A^T X^T = B^T$, 所以 $X^T = (A^T)^{-1} B^T$.

而 $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$

故而 $(A^T : B^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 + 4r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_3 \\ (-1)r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

于是

$$X^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

三、巩固练习

1. 用初等变换把矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 化成行阶梯形进而化成标准

形.

2. 试判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 22 & -5 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 则求其逆阵 A^{-1} 。

四、小结

1. 矩阵的初等变换;

<div>2. 行阶梯形矩阵和行最简形矩阵；</div> <div>3. 初等矩阵的概念；</div> <div>4. 初等变换法求逆矩阵；</div> <div>5. 初等变换法求解矩阵方程.</div> <div>五、布置作业</div> <div>学习通作业</div>	
<div>教学反思：</div> <div>一、教学内容与方法的反思</div> <div>1. 内容安排：在本次教学中，我详细讲解了矩阵的初等变换（行变换和列变换）以及初等矩阵的概念和性质。通过板书、PPT 以及实际例子，我试图帮助学生理解这些抽象概念。然而，我意识到在内容安排上，对于某些基础较弱的学生来说，可能需要更多的铺垫和解释。</div> <div>2. 教学方法：我采用了讲授、案例分析等多种教学方法。在课堂上，我通过讲解定义、性质，然后给出具体例子进行分析，最后让学生自己动手操作。这种方法在一定程度上帮助学生理解，但我也发现，部分学生在课堂上被动接受知识，缺乏主动思考和探索的机会。</div> <div>二、学生学习情况的反思</div> <div>1. 掌握情况：通过课堂互动和课后作业反馈，我发现大部分学生能够理解矩阵的初等变换和初等矩阵的基本概念，但在具体应用时仍存在困难。特别是在处理复杂矩阵时，学生往往难以准确地进行初等变换。</div> <div>2. 学习态度：大部分学生对矩阵的初等变换与初等矩阵表现出积极的学习态度，但也有部分学生感到困惑和挫败。他们觉得这些内容抽象且难以掌握，导致学习兴趣下降。</div> <div>三、教学策略与改进的反思</div> <div>1. 加强基础铺垫：在未来的教学中，我将更加注重对基础知识的铺垫和解释。通过引入更多与生活或实际问题相关的例子，帮助学生建立对矩阵的直观认识，再逐步引入初等变换和初等矩阵的概念。</div> <div>2. 增加互动环节：为了激发学生的学习兴趣 and 主动性，我将增加更多的互动环节。例如，可以设计一些小组讨论、角色扮演或游戏化学习活动，让学生在轻松愉快的氛围中学习矩阵的初等变换与初等矩阵。</div> <div>3. 提供个性化辅导：针对部分基础较弱或学习困难的学生，我将提供个性化的辅导和支持。通过一对一辅导、小组辅导或在线学习资源等方式，帮助他们克服学习障碍，提高学习效果。</div> <div>4. 反馈与调整：在教学过程中，我将及时收集学生的反馈和意见，了解他们的学习需求和困难。根据反馈结果，我将调整教学策略和方法，以确保教学效果的最大化。</div>	

授课题目	§ 2.6 矩阵的秩		课次：10
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 理解矩阵的秩的概念。</p> <p>(2) 了解矩阵的秩的性质。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 运用矩阵秩解决实际问题：学生应能够运用矩阵秩的概念和方法解决线性方程组、矩阵的相似与合同、向量组的线性相关性等实际问题；学生应能够通过分析矩阵的秩来判断线性方程组的解的情况，如无解、唯一解或无穷多解。</p> <p>(2) 培养抽象思维和逻辑推理能力：通过学习矩阵的秩，学生应能够培养自己的抽象思维能力，学会将实际问题抽象为数学问题并进行求解；学生还应通过逻辑推理和证明过程，加深对矩阵秩的理解和掌握。</p> <p>(3) 提高数学运算和解题技巧：学生应通过大量的练习和实践，提高自己的数学运算能力和解题技巧，能够迅速准确地计算矩阵的秩并解决实际问题。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣和好奇心：通过生动有趣的矩阵秩的案例和实践活动，激发学生的学习兴趣 and 好奇心，让他们感受到数学的魅力和实用性。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度：在学习矩阵秩的过程中，学生应保持严谨的数学态度，认真对待每一个数学概念和运算规则，确保自己的解题过程和结果准确无误。</p>		
教学重点	矩阵的秩的概念		
教学难点	矩阵的秩的性质		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、案例教学法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> <p>复习余子式的概念</p> <p>二、讲授新课</p> <p>矩阵的秩的概念</p> <p>定义 1 在一个 $m \times n$ 矩阵 A 中任意取定 k 行和 k 列，位于这些取定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 行列式，称为 A 的一个 k 阶子式. 记作 $D_k(A)$.</p> <p>$m \times n$ 矩阵 A 共有 $C_m^k C_n^k$ 个 k 阶子式.</p> <p>例如 $A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ 共有 $C_3^3 C_4^3 = 4$ 个三阶子式，$C_3^2 C_4^2 = 18$ 个二阶子式.</p>			

例1 写出矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的全部二阶子式.

解 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$,
 $D_6 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_9 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

定义2 设在矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D , 而 A 中所有大于 r 阶的子式 (如果存在的话) 都是零, 那么则称 D 为矩阵 A 的最高阶非零子式. 称数 r 为矩阵 A 的秩, 记作 $R(A) = r$.

例2 求矩阵 A, B 的秩, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 在矩阵 A 中, 容易看出一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

而 A 的一个 3 阶子式只有一个, 即 $|A|$, 计算可知 $|A| = 0$, 因此 $R(A) = 2$.

B 是一个行阶梯形矩阵, 其非零行有 3 行, 可知 B 的所有 4 阶子式全为零,

而 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 因此 $R(A) = 3$.

我们规定零矩阵的秩等于零.

由矩阵秩的定义及行列式的性质可得到以下结论:

(1) 对于任一 $m \times n$ 矩阵 $A_{m \times n}$, 当 $m < n$ 时, $A_{m \times n}$ 的最高阶子式是 m 阶行列式,

当 $m > n$ 时, $A_{m \times n}$ 的最高阶子式是 n 阶行列式. 所以

$R(A)$ 是由矩阵 A 本身所惟一决定的一个非负整数, 且

$$0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\};$$

特别, n 阶方阵的秩 $0 \leq R(A) \leq n$.

可见可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数.

$$(2) R(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O};$$

$$(3) R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^T);$$

$$(4) R(\mathbf{AB}) \leq \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}, \text{ 即矩阵乘积的秩不超过每个因子的秩};$$

$$(5) \text{ 设 } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵, 则 } R(\mathbf{AB}) \geq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) - n.$$

对于行阶梯形矩阵, 它的秩就等于非零行的行数, 一看便知, 无需计算. 当行数和列数很多时, 按照定义求秩是很麻烦的, 因此, 下面我们讨论求秩的另一种方法.

用初等变换求矩阵的秩

定理 1 初等变换不改变矩阵的秩.

这个定理告诉我们, 要求一个矩阵的秩, 可以先利用矩阵的初等行(列)变换将矩阵化为行(列)阶梯形矩阵, 然后就可以由阶梯形矩阵的秩确定原矩阵的秩. 行阶梯形矩阵的秩是非零行的行数, 列阶梯形矩阵的秩是非零列的列数.

例 1 求矩阵 \mathbf{A} 的秩, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

解 对 \mathbf{A} 施行初等行变换

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3 + r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 + 3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此得 $R(\mathbf{A}) = 3$.

用初等变换求矩阵秩的方法和步骤:

- (1) 用一系列初等行变换将矩阵 \mathbf{A} 化为阶梯形矩阵,
- (2) 所得的阶梯形矩阵的非零行的行数就是矩阵的秩.

例 2 求矩阵 \mathbf{A} 的秩, 并求一个最高阶非零子式.

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

解 对 \mathbf{A} 施行初等行变换

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow[1]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此得 $R(\mathbf{A}) = 3$.

$$\text{它的一个最高阶非零子式为 } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

定义 1 设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 若 $R(\mathbf{A}) = n$, 则称 \mathbf{A} 为满秩矩阵; 若 $R(\mathbf{A}) < n$, 则称 \mathbf{A} 为降秩矩阵.

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 当 $R(\mathbf{A}) = m$, 则称 \mathbf{A} 为行满秩矩阵; 当 $R(\mathbf{A}) = n$, 则称 \mathbf{A} 为列满秩矩阵.

定理 2 \mathbf{A} 为满秩方阵的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

由此可知, \mathbf{A} 可逆的充分必要条件是 \mathbf{A} 为满秩方阵.

推论 1 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{P} 为 m 阶可逆方阵, \mathbf{Q} 为 n 阶可逆方阵, 则

$$R(\mathbf{PA}) = R(\mathbf{AQ}) = R(\mathbf{PAQ}) = R(\mathbf{A})$$

例 3 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $n \times m$ 矩阵, 且 $m > n$, 试证 $|\mathbf{AB}| = 0$.

证明 因为 $R(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} = n$, $R(\mathbf{B}) \leq \min\{m, n\} = n$,

又

$$R(\mathbf{AB}) \leq \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq n < m,$$

而 \mathbf{AB} 为 m 阶方阵, 于是 \mathbf{AB} 为不满秩矩阵, 故不可逆,

因此

$$|\mathbf{AB}| = 0.$$

例4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $R(A)$.

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 3$

当 $\lambda \neq -3$ 时, $|A| \neq 0$, $R(A) = 3$.

当 $\lambda = -3$ 时, $|A| = 0$, 此时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A) = 2$.

三、巩固练习

矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为

四、小结

矩阵的秩的概念和性质

初等变换法求矩阵秩

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

一、教学内容与方法的反思

1. 内容安排: 在本次教学中, 我详细介绍了矩阵秩的概念、性质、计算方法以及其在解决实际问题中的应用。然而, 我意识到在内容安排上, 对于部分基础较弱的学生来说, 可能需要更多的铺垫和解释, 尤其是在引入矩阵秩的概念时, 应该更多地结合具体实例进行说明。
2. 教学方法: 我采用了讲授法等多种教学方法。然而, 我也发现, 部分学生在课堂上被动接受知识, 缺乏主动思考和探索的机会。因此, 在未来的教学中, 我将更多地采用引导发现法和讨论合作学习法, 鼓励学生积极参与课堂讨论, 培养他们的自主学习能力和合作精神。

二、学生学习情况的反思

1. 掌握情况: 通过课堂互动、课后作业和单元测试等方式, 我了解到大部分学生能够理解矩阵秩的概念和计算方法, 但在实际应用时仍存在困难。特别是在解决与矩阵秩相关的实际问题时, 部分学生往往难以将理论知识与实践相结合。这提示我在未来的教学中, 需要更多地引入实际问题, 通过案例分析、小组讨论等方式, 帮助学生将理论知识转化为实践能力。

2. 学习态度：大部分学生对矩阵的秩表现出积极的学习态度，但也有部分学生感到困惑和挫败。他们觉得矩阵秩的概念抽象且难以掌握，导致学习兴趣下降。这要求我在未来的教学中，需要更多地关注学生的个体差异，采用因材施教的方法，为不同水平的学生提供适合他们的学习资源和支持。

三、教学策略与改进的反思

1. 加强基础铺垫：在未来的教学中，我将更加注重对基础知识的铺垫和解释。通过引入更多与生活或实际问题相关的例子，帮助学生建立对矩阵秩的直观认识，再逐步引入矩阵秩的概念和性质。同时，我将加强对学生基础知识的训练和巩固，确保他们在掌握基本概念和方法的基础上，能够灵活运用所学知识解决实际问题。

2. 增加互动环节：为了激发学生的学习兴趣 and 主动性，我将增加更多的互动环节。例如，可以设计一些小组讨论、角色扮演或游戏化学习活动，让学生在轻松愉快的氛围中学习矩阵的秩。同时，我将鼓励学生积极参与课堂讨论和提问，及时给予他们反馈和指导，帮助他们克服学习困难。

3. 提供个性化辅导：针对部分基础较弱或学习困难的学生，我将提供个性化的辅导和支持。通过一对一辅导、小组辅导或在线学习资源等方式，帮助他们克服学习障碍，提高学习效果。同时，我将关注学生的学习进度和反馈情况，及时调整教学策略和方法，确保每个学生都能跟上教学进度并取得进步。