

授课题目	§ 3.1 线性方程组解的判定定理	课次： 11
教学目标	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 理解线性方程组有解的判定定理。</div> <div>(2) 掌握用行初等变换求解线性方程组的方法。</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 计算能力：学生能够准确计算系数矩阵和增广矩阵的秩，并据此判断线性方程组是否有解以及解的个数。</div> <div>(2) 应用能力：学生能够将线性方程组解的判定定理应用于实际问题中，如工程、物理、经济等领域的实际问题。</div> <div>(3) 问题解决能力：通过学习和实践，学生能够独立解决与线性方程组解的判定相关的复杂问题。</div> <div>(4) 逻辑思维能力：通过学习线性方程组解的判定定理，培养学生的逻辑思维和辩证思维能力，使他们能够严谨地分析和解决问题。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 学习兴趣：激发学生对线性代数和数学的兴趣，使他们愿意主动学习和探索相关知识。</div> <div>(2) 学习态度：培养学生认真、严谨的学习态度，使他们能够积极面对学习中的困难和挑战。</div> <div>(3) 合作精神：通过小组讨论、合作学习等方式，培养学生的团队合作精神和沟通能力。</div> <div>(4) 创新意识：鼓励学生勇于质疑、敢于创新，培养他们的创新意识和实践能力。</div>	
教学重点	线性方程组有解的判定定理	
教学难点	初等变换法求方程组通解的方法	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、启发式教学法、案例教学法、归纳总结法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<div>一、复习引入</div> <div>第一章中介绍的克莱姆法则，适用于含有 n 个方程，n 个未知量的线性方程组。当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解。而当 $D = 0$ 或未知量的个数和方程个数不相等时，则方程组的解就会出现多样性。</div> <div>我国古代算书《张邱建算经》中有一道著名的“百鸡问题”：今有鸡翁一，值钱伍；鸡母一，值钱三；鸡鶡三，值钱一。凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、鶡各几何？其意思为公鸡每只值 5 文钱，母鸡每只值 3 文钱，而 3 只小鸡值 1 文钱。现在用 100 文钱买 100 只鸡，问：这 100 只鸡中，公鸡、母鸡和小鸡各有多少只？其解法如下：</div> <div>设公鸡、母鸡、小鸡分别为 x、y、z 只，由题意得：</div>		

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases},$$

可求得符合题意的四组不同的整数解: $\begin{cases} x=0 \\ y=25 \\ z=75 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}, \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}, \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$

如果不考虑问题的实际背景, 由于这个三元一次方程组中有两个方程, 三个未知量, 它有无穷多组解.

在本节中将讨论 m 个方程, n 个未知量组成的方程组在什么情况下有解, 什么情况下无解, 什么时候有无穷多解, 有无穷多解时其解如何表示, 以及怎样求方程组的解等问题.

二、讲授新课

(一) 齐次线性方程组和非齐次线性方程组的概念

在线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 中, 若常数项均为 0, 即线性

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组.

若常数项不全为 0, 称方程组为非齐次线性方程组.

显然, 齐次线性方程组是非齐次线性方程组的特殊情况, 因而我们先研究非齐次线性方程组解的情况, 再研究它的特殊情况——齐次线性方程组解的情况.

(二) 非齐次线性方程组解的判定

1、非齐次线性方程组有无解的判定

例 1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 13 \end{array} \right)$ 有唯一解 $r(A) = 3, r(\bar{A}) = 3, r(A) = r(\bar{A})$.

例 2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$ 无解 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3, r(A) \neq r(\bar{A})$.

例3 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 3 \\ 0 & 6 & -9 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解 $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 2$, $r(A) = r(\bar{A})$.

由上述观察可知, 当 $r(A) = r(\bar{A})$ 时, 线性方程组无矛盾方程, 一定有解;
当 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 时, $r(\bar{A}) = r(A) + 1$, 有矛盾方程, 线性方程组一定无解. 反之亦然.

定理1 非齐次线性方程组有解的充分必要条件为 $r(A) = r(\bar{A})$.

注意: 此充要条件包括四个命题:

(1) 有解 $\Rightarrow r(A) = r(\bar{A})$

(2) 有解 $\Leftarrow r(A) = r(\bar{A})$

(3) 无解 $\Rightarrow r(A) \neq r(\bar{A})$

(4) 无解 $\Leftarrow r(A) \neq r(\bar{A})$

当 $r(A) = r(\bar{A})$ 时, 这两个秩数恰为有效方程的个数. 例1中 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 代表有3个有效方程, 例3中 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 代表有2个有效方程.

2、解的个数的判定

非齐次线性方程组解的个数共有两种情况, 有唯一解和有无穷多个解, 关键取决于有效方程的个数和未知量个数间的关系.

当有效方程的个数=未知量个数时, 每个未知量都被唯一限定, 因而方程组有唯一解;

当有效方程的个数<未知量个数时, 有未知量不被限制, 产生自由未知量, 方程组有无穷多个解.

定理2 非齐次线性方程组有唯一解的充分必要条件为 $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (其中, n 为未知量的个数).

定理3 非齐次线性方程组有无穷多个解的充分必要条件为 $r(A) = r(\bar{A}) < n$.

综上: 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} r(A) \neq r(\bar{A}) \Leftrightarrow \text{无解} \\ r(A) = r(\bar{A}) = n \Leftrightarrow \text{有唯一解} \\ r(A) = r(\bar{A}) < n \Leftrightarrow \text{有无穷多个解(有 } n - r(A) \text{ 个自由未知量)} \end{cases}$$

例1 判断下列线性方程组是否有解, 若有解, 有多少个解?

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

解 (1) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -4r_1+r_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$\because r(A) \neq r(\bar{A}), \therefore$ 线性方程组无解.

$$(2) \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\because r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 4, \therefore$ 线性方程组有无穷多个解, 有 $4 - 2 = 2$ 个自由未知量.

例2 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = k \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$ 有解, 有多少个解?

解 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & k \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & k \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & k-6 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{array} \right)$$

\because 方程组有解, $\therefore r(A) = r(\bar{A}),$

$\because r(A) = 2, \therefore r(\bar{A}) = 2, \therefore k - 6 = 0,$ 即 $k = 6$ 时线性方程组有解.

$\because r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 3, \therefore$ 线性方程组有无穷多个解, 有 $3 - 2 = 1$ 个自由未知量.

例3 求解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$

解 用初等行变换将增广矩阵化为行最简形

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

显然, $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 4$, 所以 $Ax = b$ 有无穷多解, 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} x_2 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$, 得到一般解

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 1 - k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(三) 齐次线性方程组解的判定

由于齐次线性方程组是非齐次的特殊情况, 因而非齐理论对齐次也适用. 下面就用非齐次线性方程组解的理论就齐次线性方程组解的情况进行探讨.

1、有无解的讨论

$$\text{齐次线性方程组的增广矩阵 } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right),$$

在对 \bar{A} 进行初等行变换化阶梯阵过程中, 最后一列永远为 0, 因而齐次线性方程组的 $r(A) \equiv r(\bar{A})$, 永远没有矛盾方程, 所以齐次线性方程组一定有解, 且

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

一定是齐次线性方程组的解, 称其为**零解**.

定理 4 齐次线性方程组定有零解.

2、解的个数的讨论

由于齐次线性方程组中 $r(A) \equiv r(\bar{A})$, 故仅用系数矩阵讨论即可.

$r(A) = n \Leftrightarrow$ 有唯一解 \Leftrightarrow 仅有零解.

$r(A) < n \Leftrightarrow$ 有无穷多个解 \Leftrightarrow 除零解外, 还有无穷多个非零解.

定理 5 齐次线性方程组仅有零解的充分必要条件为 $r(A) = n$.

定理 6 齐次线性方程组除零解外还有无穷多个非零解的充分必要条件为 $r(A) < n$.

例 4 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

解 用初等行变换将系数矩阵化为行阶梯形

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

显然 $R(A) = 3 < 5$, 所以方程组有无穷多解. 将上述行阶梯形继续化成行最简形:

$$A \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

取自由变量 $\begin{cases} x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$, 得到一般解

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + 2k_2 \\ x_2 = -2k_1 - 3k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

三、巩固练习

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 λ 的值.

四、小结

1. 非齐次线性方程组有解的判定；

2. 齐次线性方程组有解的判定；

3. 求解线性方程组的通解。

五、布置作业

学习通作业

教学反思：

一、教学内容与方法的反思

1. 内容安排：在本次教学中，我详细介绍了线性方程组解的判定定理的内容、判定方法和应用。通过理论讲解、实例分析和实践操作相结合的方式，我试图帮助学生全面理解和掌握该定理。然而，我意识到在内容安排上，对于部分基础较弱的学生来说，定理的推导和证明过程可能过于复杂，导致他们难以跟上教学节奏。因此，在未来的教学中，我需要更加注重对定理推导过程的简化，或者采用更加直观的教学方法来帮助学生理解。

2. 教学方法：我采用了讲授法、多媒体教学法、启发式教学等多种教学方法。通过口头讲解、多媒体课件展示、问题引导和小组讨论等方式，我试图激发学生的学习兴趣 and 主动性。然而，我也发现，部分学生在课堂上仍然处于被动接受知识的状态，缺乏主动思考和探索的机会。因此，在未来的教学中，我需要更加注重培养学生的自主学习能力和创新精神，鼓励他们积极参与课堂讨论和实践活动。

二、学生学习情况的反思

1. 掌握情况：通过课堂互动、课后作业和单元测试等方式，我了解到大部分学生能够理解线性方程组解的判定定理的基本内容和判定方法，但在实际应用时仍存在困难。特别是在解决与定理相关的实际问题时，部分学生往往难以将理论知识与实践相结合。这提示我在未来的教学中，需要更加注重培养学生的实践能力和解决问题的能力。

2. 学习态度：大部分学生对线性方程组解的判定定理表现出积极的学习态度，但也有部分学生感到困惑和挫败。他们觉得定理的内容抽象且难以掌握，导致学习兴趣下降。这要求我在未来的教学中，需要更加注重关注学生的个体差异和学习需求，采用因材施教的方法，为不同水平的学生提供适合他们的学习资源和支持。

三、教学策略与改进的反思

1. 简化推导过程：针对部分基础较弱的学生，我将尝试简化线性方程组解的判定定理的推导过程来帮助学生理解定理的内容。同时，我也将注重培养学生的逻辑思维能力和数学素养，帮助他们更好地理解 and 掌握定理。

2. 增加实践环节：为了提高学生的实践能力和解决问题的能力，我将增加更多的实践环节。例如，可以设计一些与线性方程组解的判定定理相关的实际问题，让学生进行分析和解决。通过实践操作，学生可以更加深入地理解和掌握定理的内容和应用。

3. 关注个体差异：针对学生的个体差异和学习需求，我将采用因材施教的方法。对于基础较弱的学生，我将提供更多的辅导和支持；对于基础较好的学生，我将鼓励他们进行更深入的学习和研究。同时，我也将注重培养学生的自主学习能力和创新精神，帮助他们更好地适应未来的学习和工作。

授课题目	§ 3.2 向量及其运算	课次：12
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>（1）理解向量的概念。</p> <p>（2）掌握向量的加法和数乘运算法则。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>（1）培养数形结合能力：通过将向量运算与熟悉的数的运算进行类比，培养学生数形结合解决问题的能力；使学生能够借助图形直观地理解向量的运算和性质。</p> <p>（2）提高运算能力：通过具体的图形和实例，使学生能够熟练地运用三角形法则和平行四边形法则来计算两个向量的和向量；使学生能够运用向量数乘运算律进行向量运算。</p> <p>（3）培养问题解决能力：使学生能够运用向量的概念和运算来解决实际问题；培养学生的自主学习能力和合作能力，使其在问题的发现、分析、探讨中提高解决问题的能力。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>（1）激发学习兴趣：通过生动的实例和图形，激发学生对向量及其运算的学习兴趣；创设和谐又有竞争的课堂教学气氛，使学生在轻松愉快的氛围中学习向量知识。</p> <p>（2）培养严谨态度：在教学过程中，注重培养学生的严谨态度，使其能够认真对待每一个向量运算和性质；鼓励学生提出问题、解决问题，培养其探究精神和创新精神。</p>	
教学重点	向量的概念	
教学难点	向量的几何意义	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、探究式教学法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>在实际问题中，经常会遇到一些无法用一个数描述的量．如，某商店的某件商品同一天在 5 个不同的分销店销售，需要用 5 个有序数 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 表示该天的销售量；空间中的一个球体，要描述其球心的位置和半径需要用有序的 4 个数 (x, y, z, R) 构成的数组．这种例子举不胜举，作为它们的共同特征，有下面的概念．</p> <p>二、讲授新课</p> <p>（一）向量的概念</p> <p>定义 1 （向量） 由 n 个（实）数 a_1, a_2, \cdots, a_n 组成的有序数组，称作 n 维（实）向量（用希腊字母 α, β, \cdots 来表示），记作</p>		

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

其中第 i 个数 a_i 称为向量 α 的(第 i 个)分量。或记作 $\alpha = \{a_i\}_n$ 或 $\alpha = \{a_i\}$,

用 R^n 表示 n 维实向量的全体; 用 C^n 表示 n 维复向量的全体。

n 维行向量。 n 维列向量。(在讨论向量概念和性质时, 行向量和列向量是完全一样的)。

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

n 维行向量即为 $1 \times n$ 的矩阵, n 维列向量是 $n \times 1$ 矩阵。本课程采用列向量 α 形式

利用转置, α^T 表示一个行向量, 也有 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T$ 。

(联系三维空间中的有向线段或点的坐标, 直观理解向量的概念)

向量是矩阵的特殊形式, 因此向量也有下列概念和性质。

(二) 向量的运算

定义 2 设 $\alpha = \{a_i\}_n$, $\beta = \{b_i\}_n$ 是二个 n 维向量。

1) 向量相等 若 $a_i = b_i$, $i = 1, \dots, n$, 称向量 α 和向量 β 相等。

2) 零向量 所有分量都为零的向量。一般记作 θ ; 或 θ_n 。注意, $\theta_2 \neq \theta_3$ 。

3) 负向量 称向量 $-\alpha = \{-a_i\}_n$ 为向量 α 的负向量。

4) 向量加法 称向量 $\gamma = \alpha + \beta = \{a_i + b_i\}_n$ 为向量 α 和向量 β 的和,

向量减法 向量 α 和向量 β 的减法) 定义为 α 和 $(-\beta)$ 的加法:

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)。$$

5) 数乘向量 设 k 是一个数。称向量 $k\alpha = \alpha k = \{ka_i\}_n$ 为向量 α 和数 k

的数乘向量。

把矩阵的加法、数乘等运算法则移到向量上，同样成立：

$$(1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$(2) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$(3) \quad \alpha + \theta = \alpha; \quad \alpha - \alpha = \theta.$$

$$(4) \quad k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta; \quad (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha.$$

$$(5) \quad (kl)\alpha = k(l\alpha).$$

$$(6) \quad 1\alpha = \alpha; \quad (-1)\alpha = -\alpha; \quad 0\alpha = \theta; \quad k\theta = \theta.$$

$$(7) \quad \text{若 } k\alpha = \theta, \text{ 则或 } k=0 \text{ 或 } \alpha = \theta.$$

$$(8) \quad \text{设 } I \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵, 则 } I\alpha = \alpha.$$

例 1 设 $\alpha_1 = (1 \ 2 \ -1)^T$, $\alpha_2 = (2 \ -3 \ 1)^T$, $\alpha_3 = (4 \ 1 \ -1)^T$, 计算 $2\alpha_1 + \alpha_2$; 并判别 α_3 与 α_1, α_2 的关系。

解 $2\alpha_1 + \alpha_2 = (4 \ 1 \ -1)^T$ 。且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 。或等价地 $2\alpha_1 + \alpha_2 + (-1)\alpha_3 = \theta$

(三) 向量的几何意义

在解析几何中，我们把“既有大小又有方向的量”叫做向量。在平面上，以坐标原点为起点，以点 $P(x, y)$ 为终点的有向线段表示向量 $\overrightarrow{OP} = \{x, y\}$ ，我们称之为 2 维向量；在空间直角坐标系中，以坐标原点为起点，以点 $P(x, y, z)$ 为终点的有向线段表示向量 $\overrightarrow{OP} = \{x, y, z\}$ ，我们称之为 3 维向量。当 $m > 3$ 时， m 维向量就不再有这种几何形象，我们可以通过几何术语来表达。

三、巩固练习

$$\text{设 } \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } \alpha + 2\beta, \quad 2\alpha - 3\beta.$$

四、小结

向量的概念及运算

五、布置作业	
学习通作业	
<p>教学反思：</p> <p>一、教学目标达成情况</p> <p>1. 知识掌握：</p> <p>（1）大部分学生能够理解向量的基本概念，包括向量的定义、表示方法和基本性质。</p> <p>（2）学生在向量的加法、减法、数乘运算方面掌握得较为扎实，但在向量分解和向量积等复杂运算上，仍有部分学生感到困惑。</p> <p>2. 能力培养：</p> <p>（1）通过大量的例题练习和实际操作，学生的运算能力和问题解决能力得到了显著提升。</p> <p>（2）在小组合作和讨论中，学生的沟通能力和团队协作能力也有所增强。</p> <p>3. 情感与态度：</p> <p>（1）学生对向量及其运算的学习兴趣较为浓厚，课堂氛围积极活跃。</p> <p>（2）学生在面对难题时，能够保持积极的心态，勇于尝试和探索。</p> <p>二、教学方法与策略</p> <p>1. 讲授与讨论：</p> <p>讲授过程中，注重知识的系统性和逻辑性，但有时会忽略学生的个体差异，导致部分学生跟不上节奏。</p> <p>讨论环节能够激发学生的思维，但部分学生在讨论中缺乏主动性，需要引导其积极参与。</p> <p>2. 信息技术辅助教学：</p> <p>（1）多媒体资源和在线学习平台为学生提供了丰富的学习资源，但部分学生缺乏自主学习能力，需要教师的引导和监督。</p> <p>（2）信息技术辅助教学需要与传统教学方法相结合，以发挥最佳效果。</p> <p>三、存在问题与改进措施</p> <p>1. 知识难点突破：</p> <p>（1）针对向量分解和向量积等复杂运算，需要设计更多的例题和练习，帮助学生逐步掌握。</p> <p>（2）可以引入更多的实际问题 and 应用场景，让学生在解决问题的过程中加深对知识的理解和掌握。</p> <p>2. 学生个体差异：</p> <p>（1）需要关注学生的个体差异，设计不同层次的练习和作业，以满足不同学生的学习需求。</p> <p>（2）在教学过程中，要注重因材施教，针对不同学生的学习情况给予个性化的指导和帮助。</p> <p>3. 教学反思与总结：</p> <p>（1）需要定期进行教学反思和总结，分析教学效果和存在的问题，不断改进教学方法和策略。</p> <p>（2）同时，也要鼓励学生进行反思和总结，培养他们的自主学习能力和批判性思维。</p>	

授课题目	§ 3.3 向量组的线性相关性		课次：13
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 理解向量的线性组合、线性表示，向量组的线性相关、线性无关的定义。</p> <p>(2) 掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质和判别法。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 培养运算与推理能力：通过大量的例题练习，提高学生的向量运算能力和逻辑推理能力；使学生能够熟练运用各种判定方法来判断向量组的线性相关性。</p> <p>(2) 培养问题解决能力：使学生能够运用向量的线性相关性来解决实际问题，如判断向量组的线性关系、求解线性方程组等；培养学生的创新思维和问题解决能力，使其在面对复杂问题时能够灵活运用所学知识。</p> <p>(3) 培养团队协作能力：通过分组讨论和合作学习，增强学生的团队协作能力；使学生在合作中相互学习、相互帮助，共同提高向量线性相关性的学习水平</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动的实例和有趣的数学故事激发学生对向量线性相关性的学习兴趣；鼓励学生参与数学竞赛或活动，提高学习积极性和自信心。</p> <p>(2) 培养严谨态度：注重培养学生的严谨态度，要求学生在解题过程中认真审题、规范书写；鼓励学生进行反思和总结，提高数学思维和解决问题的能力。</p> <p>(3) 培养探究精神：鼓励学生勇于提出问题、分析问题和解决问题，培养其探究精神；引导学生关注向量线性相关性在实际问题中的应用，培养其创新意识和实践能力。</p>		
教学重点	向量组线性相关、线性无关的有关性质和判别法		
教学难点	向量线性相关与线性无关的定义		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、直观演示法、讨论法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> <p>复习向量的运算</p> <p>二、讲授新课</p> <p>(一) 向量组的线性组合</p> <p>定义 1 (线性组合与线性表示) 设有向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.</p> <p>(1) 称向量 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$</p> <p>是向量组 (I) 的一个线性组合，其中 l_1, l_2, \cdots, l_m 是一组数。</p> <p>(2) 若向量 β 是向量组 (I) 的一个线性组合：即存在一组数 l_1, l_2, \cdots, l_m，使得</p>			

$$\beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_m \alpha_m$$

则称向量 β 可以由向量组 (I) 线性表示。

例 1 证明任意一个 n 维向量都可以由向量组 I:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性表示。向量组 I: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称作 n 维坐标向量组。(联系三维空间的坐标向量)

例 2 设向量组 $\alpha_1 = (1 \ 2 \ -1)^T$, $\alpha_2 = (2 \ 3 \ 0)^T$, $\alpha_3 = (-1 \ 0 \ 3)^T$, $\alpha_4 = (-2 \ -2 \ 4)^T$, 判别 α_4 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; 若可以, 求其表示式。

解 设 $\alpha_4 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$,

解之得 $l_1 = -1, l_2 = 0, l_3 = 1$, 即 $\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_3$ 。

(二) 向量组的线性相关与线性无关

定义 2 (线性相关) 对于向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 若存在不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s = \theta,$$

则称向量组 (I) 线性相关; 否则称向量组 (I) 线性无关。

否则的等价说法: 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性组合为零的组合系数 k_1, k_2, \cdots, k_s 必须全为零。

如例 1 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 成立: $2\alpha_1 + \alpha_2 + (-1)\alpha_3 = \theta$, 线性相关。

注意, (1) 线性相关性与向量在向量组的排序无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$

具有相同的线性相关性。(2) 解释 $n=3$, 三个向量线性相关的几何意义, 是这三个向量共面。

例3 判断向量组 $\alpha_1 = (1 \ 2 \ -1)^T, \alpha_2 = (2 \ 3 \ 0)^T, \alpha_3 = (-1 \ 0 \ 3)^T$ 的线性相关性。

解 令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \theta$, 解之: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 线性无关。

三维空间中的三个坐标向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 线性无关。事实上有,

例4 证明坐标向量组 $I: \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关。

定理1 向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 线性相关的充分必要条件是向量组 (I) 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

例5 含有零向量的向量组一定线性相关。

单个向量构成的向量组 (I): α , 约定: 若 $\alpha = \theta$, 则线性相关; 若 $\alpha \neq \theta$, 线性无关。

例6 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。证明向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

线性无关。

证明 令 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \theta$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性无关性, 解之 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

定理2 设向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 而向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关。则向量 β 可由向量组 (I) 线性表示; 且表示式唯一。

证明 存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s, k_{s+1}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + k_{s+1}\beta = \theta,$$

证 $k_{s+1} \neq 0$ 。否则若 $k_{s+1} = 0$, 与条件 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关矛盾。如此有

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k_{s+1}}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k_{s+1}}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{k_s}{k_{s+1}}\right)\alpha_s$$

再证表示式唯一。设有两个表示式：

$$\beta = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_s\alpha_s, \quad \beta = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \cdots + q_s\alpha_s,$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 可得 $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \cdots, p_s = q_s$,

下面可以看到用矩阵初等变换来判别向量组的线性相关性及向量的表示显得更方便。

定理 3 若向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中有部分向量线性相关, 则 (I) 一定线性相关。

该定理等价说法: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则其任何一部分向量都线性无关。如在三维空间中, 三个坐标向量线性无关 (非共面), 则其中任何二个向量也线性无关 (非共线)。

推论 1 设 n 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 若 $n < s$, 则向量组 (I) 线性相关。

推论说得是: 向量组中的向量个数超过向量维数时, 该向量组一定线性相关。见上例。

定理 4 若 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则在这些向量各添加 l 个分量所得到的新向量组也线性无关; 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则在这些向量各减少 l 个分量所得到的新向量组也线性相关。

例如, R^3 中的单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 在每一个向量中任意添加一个分量, 构成向量组:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix},$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 仍然线性无关。

例7 判别向量组 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_2 = (1 \ -1 \ 0)^T$ 和向量组

$\varepsilon_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, \varepsilon_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$ 的等价性。

解 $(\alpha_1 \ \alpha_2) = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

由于矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 非奇，成立 $(\varepsilon_1 \ \varepsilon_2) = (\alpha_1 \ \alpha_2) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ，所以两向量组等价

定理5 若向量组 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，且 $s < t$ ，则向量组 (II) 线性相关。

证明 存在 $s \times t$ 矩阵 L ，成立 $B = AL$ 。考虑齐次线性方程组 $Lx = \theta$ 。由于 $s < t$ ，方程有非零解 x 。故成立

$$Bx = ALx = A\theta = \theta。$$

由于 $Bx = \theta$ 有非零解，故向量组 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关。

推论2 若向量组 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，且向量组 (II) 线性无关，则 $t \leq s$ 。

定理5说得是：一组向量个数多的向量组若可以被向量个数少的向量组线性表示，则向量个数多的向量组一定线性相关；而推论2说得是：一组线性无关的向量组若可以被某向量组线性表示，则线性无关的向量组其含有的向量个数一定不超过另一向量组其含有的向量个数。

例8 判别下列向量组的线性相关性

(1) $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 3)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 4)^T$

(2) $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 3, 5)^T, \alpha_3 = (4, 8, 12)^T$

解 (1) 由于向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关，由定理6(2)知， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

也线性无关;

(2) 显然 $\alpha_3 = 4\alpha_1$, 故 α_1 与 α_3 线性相关, 由定理 6 (1) 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关.

例 9 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明:

(1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示;

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证 (1) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 由定理 6 (1) 知 α_2, α_3 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 由定理 4 知 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示.

(2) 用反证法. 假设 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 同时由(1)知 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示, 故 α_4 能由 α_2, α_3 线性表示, 这与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾.

三、巩固练习

设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 试讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

四、小结

- 1. 向量组线性组合的定义、向量能否由向量组线性表示的判定定理;
- 2. 向量组线性相关与线性无关的定义、判定定理;
- 3. 向量组线性相关与线性无关的性质以及相关结论。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

一、教学目标达成情况

1. 知识掌握:

(1) 大部分学生能够理解向量组线性相关和线性无关的概念, 并能运用相关性质进行判断。

(2) 学生在掌握向量组线性相关性的判定方法上表现出色, 如矩阵秩法、行列式法等。

(3) 但仍有少数学生在面对复杂向量组时, 难以准确判断其线性相关性。

2. 能力培养:

(1) 通过例题练习和实际操作, 学生的运算能力和逻辑推理能力得到了显著提升。

(2) 学生在小组合作和讨论中, 培养了团队协作和问题解决能力。

(3) 但部分学生在将线性相关性应用于实际问题时, 仍显得不够灵活。

3. 情感与态度:

(1) 学生对向量组的线性相关性表现出浓厚的学习兴趣, 课堂氛围积极。

(2) 学生在面对难题时, 能够保持积极的心态, 勇于尝试和探索。

(3) 但仍有少数学生在遇到困难时, 容易放弃或产生畏难情绪。

二、教学方法与策略

1. 互动讨论:

(1) 通过分组讨论和课堂问答, 鼓励学生积极参与和提出问题。

(2) 但有时讨论时间不够充分, 导致部分学生未能充分表达自己的观点。

三、存在问题与改进措施

1. 知识难点突破:

(1) 针对向量组线性相关性的复杂定理和判定方法, 需要设计更多的例题和练习, 帮助学生逐步掌握。

(2) 可以引入更多的实际应用场景, 让学生在解决问题的过程中加深对线性相关性的理解和掌握。

2. 学生个体差异:

(1) 需要关注学生的个体差异, 设计不同层次的练习和作业, 以满足不同学生的学习需求。

(2) 在教学过程中, 要注重因材施教, 针对不同学生的学习情况给予个性化的指导和帮助。

3. 课堂氛围与互动:

(1) 需要营造更加积极、开放的课堂氛围, 鼓励学生勇于提问和发表意见。

(2) 加强师生之间的互动和沟通, 及时了解学生的学习情况 and 需求, 调整教学策略和方法。

4. 教学反思与总结:

(1) 需要定期进行教学反思和总结, 分析教学效果和存在的问题, 不断改进教学方法和策略。

(2) 同时, 也要鼓励学生进行反思和总结, 培养他们的自主学习能力和批判性思维。

授课题目	§ 3.4 向量组的秩与极大无关组		课次：14
教学目的	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 理解向量组的最大线性无关组和向量组秩的概念；</p> <p>(2) 会求向量组的最大线性无关组及向量组的秩；</p> <p>(3) 了解向量组等价的概念，向量组的秩与矩阵秩的关系。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高抽象思维能力：通过学习向量组的秩和极大无关组，学生应能够运用抽象思维来理解和解决数学问题；学生需能够将实际问题抽象为向量组的数学问题，并运用相关知识进行求解。</p> <p>(2) 培养逻辑推理能力：学生应能够通过逻辑推理来验证和证明向量组的秩和极大无关组的性质；学生需能够运用逻辑推理来分析和解决向量组的线性相关性问题。</p> <p>(3) 增强运算能力：学生应能够熟练掌握向量组的秩和极大无关组的计算方法，包括矩阵的秩的计算、行列式的计算等；学生需能够在运算过程中保持准确性和高效性，避免计算错误。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的教学内容和教学方法，激发学生的学习兴趣 and 求知欲；引导学生关注向量组的秩和极大无关组在实际问题中的应用，增强学生的学习动力。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度：学生在学习过程中应养成严谨的数学态度，对待数学问题要认真负责、一丝不苟；鼓励学生勇于质疑、敢于探索，培养学生的批判性思维 and 创新能力。</p>		
教学重点	求向量组的极大线性无关组		
教学难点	求向量组的极大线性无关组		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、案例分析法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> <p>复习向量组的线性相关性</p> <p>二、讲授新课</p> <p>定义 1 设有向量组 A，若</p> <p>(1) A 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关；</p> <p>(2) A 中任意 $r+1$ 个（如果有 $r+1$ 个向量的话）向量线性相关，</p> <p>则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组. 称 r 为向量组 A 的秩，记作 $R(A)$ 或 R_A.</p> <p>特别地，若向量组 A 本身线性无关，则 A 本身就是其一个极大无关组；只</p>			

含零向量的向量组没有极大无关组, 规定其秩为 0.

由定义可以得出, 当 $R(\mathbf{A}) = r$ 时, \mathbf{A} 中任意 r 个线性无关的向量都是 \mathbf{A} 的一个极大无关组, 这也说明向量组的极大无关组不唯一. 例如, 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 其中 α_1, α_2 和 α_1, α_3 都是它的一个极大无关组.

定义 1' (极大无关组的等价定义) 设向量组 \mathbf{A} , 若 \mathbf{A} 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组 \mathbf{A} 中任意一个向量都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示,

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 \mathbf{A} 的一个极大线性无关组.

根据定义 1' 很容易证明, 向量组 \mathbf{A} 与它的极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以互相线性表示, 由此可得

定理 1 向量组与其任何一个极大无关组等价.

证 设向量组 \mathbf{A} 的秩为 r , \mathbf{A} 的一个极大无关组为 $\mathbf{A}_1: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. 根据定义, 二者等价即二者可以互相线性表示.

由于 \mathbf{A}_1 中的向量都是 \mathbf{A} 中的向量, 显然 \mathbf{A}_1 可由 \mathbf{A} 线性表示. 又由定义 1' 知, \mathbf{A} 中任一向量均可由 \mathbf{A}_1 线性表示, 即向量组 \mathbf{A} 可由 \mathbf{A}_1 线性表示. 因此, \mathbf{A} 与 \mathbf{A}_1 等价.

推论 向量组的任意两个极大无关组等价.

定理 1 表明, 在讨论向量组之间的一些关系时, 可以用极大无关组来代替向量组, 使问题的讨论更加简化.

由于有限个向量组成的向量组 $\mathbf{A}: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 存在一一对应的关系, 根据二者秩的定义, 很容易想到向量组 \mathbf{A} 的秩就等于矩阵的秩, 即

定理 2 矩阵的秩等于它的行向量组的秩, 也等于它的列向量组的秩.

这个定理给出了一种求向量组的秩的方法, 即可以利用求矩阵的秩来求向量

组的秩.

例1 向量组 $A: \alpha_1 = (1, 0, -2)^T, \alpha_2 = (3, 2, 0)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 1)^T, \alpha_4 = (2, 3, 5)^T$, 求向量组 A 的秩.

解 构造矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 对其施行初等行变

换

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求得 $R(A) = 2$, 因此向量组 A 的秩也为 2.

显然, 例1中向量组 A 的极大无关组应含有两个线性无关的向量, 如何便捷的求出这两个向量呢?

定理3 行初等变换不改变矩阵列向量组的线性相关性, 列初等变换不改变矩阵行向量组的线性相关性.

证 设矩阵 A 经过一系列行初等变换得到矩阵 B , 由 §2.5 定理2和定理3可知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $PA = B$. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 从而,

$$P\alpha_j = \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

任取 $A_1 = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}), B_1 = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r})$, 则 $PA_1 = B_1$. 显然方程组 $A_1 x = 0$ 与 $B_1 x = 0$ 是同解方程组, 因此 A_1 与 B_1 的列向量组有相同的线性相关性. 即行初等变换不改变列向量组的线性相关性. 同理可证列初等变换不改变矩阵的行向量组的线性相关性.

定理3提供了求向量组的极大无关组的一种有效的方法.

例2 求例1中向量组 A 的一个极大无关组.

解 例1中对矩阵 A 作初等行变换已经得到

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

显然, 矩阵 A 中位于 1, 2 行 1, 2 列的二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 故向量组

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性无关. 由 § 3.2 中定理 6 (2) 可知, 向量组 β_1, β_2 也线性无关. 由定理 3 知, 行初等变换不改变列向量组的线性相关性, 故 α_1, α_2 为向量组 A 的极大无关组.

请读者想一想还有没有其他的极大无关组?

设有 n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 归纳求向量组 A 的秩和极大无关组的步骤如下:

第一步, 构造矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 通过行初等变换化矩阵 A 为行阶梯形矩阵 B , 则 $R(A) = B$ 的非零行数;

第二步, 若 $R(A) = r$, 设在阶梯形矩阵 B 中, 非零首元所在的列的序号为 j_1, j_2, \dots, j_r , 那么 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 就是向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个极大无关组.

例 3 已知向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1, -1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1, -1)^T$, $\alpha_4 = (-1, 3, 2, 1)^T$, 求它的一个极大无关组, 并将剩余向量用极大无关组线性表示.

解 以各向量为列作矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 对 A 作初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以看到首非零元所在的列分别为 1, 2, 4 列, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为原向量组的一个极大无关组. 从行最简形矩阵中可以得到 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

三、巩固练习

$$\text{设 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 求向量组}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大无关组和秩, 并将其余不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

四、小结

1. 极大无关组的概念;
2. 矩阵的秩与向量组的秩的关系;
3. 求向量组的秩以及最大无关组的方法。

五、布置作业

学习通作业	
<p>教学反思：</p> <p>一、教学亮点</p> <p>案例分析与综合应用相辅相成：通过引入具体案例和综合应用，学生能够看到向量组的秩和极大无关组在实际问题中的应用价值。这种教学方式有助于增强学生的实践能力和创新意识。</p> <p>二、教学不足</p> <p>1. 时间分配不够合理：在教学过程中，我发现部分学生在理解向量组的秩和极大无关组的定义和性质时花费了较多时间，导致后续的环节时间紧张。未来在备课时，我需要更加精细地规划时间，确保每个环节都能得到充分展开。</p> <p>2. 个别学生参与度不高：虽然大部分学生都积极参与了小组讨论和实践活动，但仍有少数学生显得不够主动。这可能与他们的学习基础、兴趣点或性格特点有关。未来我需要更加关注这些学生的需求，采取个性化的教学策略来激发他们的学习兴趣。</p> <p>三、改进措施</p> <p>1. 优化时间分配：在备课时，我需要更加精细地规划每个教学环节的时间，确保每个环节都能得到充分展开。同时，我可以在课堂上灵活调整教学节奏，根据学生的学习情况适时调整教学内容和时间安排。</p> <p>2. 提高个别学生参与度：为了激发更多学生的学习兴趣 and 参与度，我可以采取个性化的教学策略，如设计具有挑战性的学习任务、提供个性化的学习资源和指导等。同时，我也可以在课堂上更多地关注这些学生的表现，给予他们更多的鼓励和支持。</p>	

授课题目	§ 3.6 线性方程组解的结构		课次：15
教学目的	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 理解齐次、非齐次线性方程组的基础解系、通解的概念；</p> <p>(2) 掌握齐次线性方程组基础解系的求法，掌握非齐次线性方程组通解的求法。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 提高数学运算能力：通过学习和练习，学生能够熟练掌握线性方程组的求解方法，如高斯消元法、代入法、矩阵法等；能够准确、高效地计算出线性方程组的解。</p> <p>(2) 培养抽象思维和逻辑推理能力：学生应能够通过逻辑推理和抽象思维来理解和解决线性方程组问题；能够将实际问题抽象为线性方程组问题，并运用相关知识进行求解。</p> <p>(3) 增强问题解决能力：学生应能够运用所学的线性方程组知识来解决实际问题，如物理、工程、经济等领域中的问题；能够根据问题的具体情况，选择合适的求解方法和技巧。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的教学内容和教学方法，激发学生的学习兴趣 and 求知欲；引导学生关注线性方程组解的结构在实际问题中的应用，增强学生的学习动力。</p> <p>(2) 培养严谨的数学态度：学生在学习过程中应养成严谨的数学态度，对待数学问题要认真负责、一丝不苟；鼓励学生勇于质疑、敢于探索，培养学生的批判性思维 and 创新能力。</p>		
教学重点	线性方程组的解法		
教学难点	线性方程组的解法		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、探究式教学法、讨论法、总结反思法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<p>一、复习引入</p> <p>第一章中介绍的克莱姆法则，适用于含有 n 个方程，n 个未知量的线性方程组。当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解。而当 $D = 0$ 或未知量的个数和方程个数不相等时，则方程组的解就会出现多样性。</p> <p>我国古代算书《张邱建算经》中有一道著名的“百鸡问题”：今有鸡翁一，值钱伍；鸡母一，值钱三；鸡鶡三，值钱一。凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、鶡各几何？其意思为公鸡每只值 5 文钱，母鸡每只值 3 文钱，而 3 只小鸡值 1 文钱。现在用 100 文钱买 100 只鸡，问：这 100 只鸡中，公鸡、母鸡和小鸡各有多少只？其解法如下：</p> <p>设公鸡、母鸡、小鸡分别为 x、y、z 只，由题意得：</p>			

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases},$$

可求得符合题意的四组不同的整数解: $\begin{cases} x=0 \\ y=25 \\ z=75 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}, \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}, \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$

如果不考虑问题的实际背景, 由于这个三元一次方程组中有两个方程, 三个未知量, 它有无穷多组解.

在本节中将讨论 m 个方程, n 个未知量组成的方程组在什么情况下有解, 什么情况下无解, 什么时候有无穷多解, 有无穷多解时其解如何表示, 以及怎样求方程组的解等问题.

二、讲授新课

(一) 齐次线性方程组解的结构

一般地, 齐次线性方程组的解向量具有如下性质:

性质 1 若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_2$ 均为 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解;

性质 2 若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, k 为实数, 则 $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

容易看出, 齐次线性方程组必有零解. 由上述性质可知, 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组的解, 则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_t\boldsymbol{\eta}_t$ 也是其解. 即若齐次线性方程组有非零解, 则其解一定有无穷多个. 如何表示这无穷多个解呢?

定义 1 如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 满足:

- (1) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解;
- (2) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关;
- (3) $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的任一解都可以由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 线性表示.

则称 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的**基础解系**. 简言之, 基础解系即为解向量组的极大无关组.

定理 1 对于 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m \times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 若 $R(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则 $\boldsymbol{A}_{m \times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 必有基础解系, 且任一基础解系中必含有 $n-r$ 个解向量.

根据上述讨论, 可将求解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系的步骤归纳如下:

第一步, 对系数矩阵 \boldsymbol{A} 施行初等行变换, 将其化为行最简形 \boldsymbol{B} , 可得到 $R(\boldsymbol{A})$.

当 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}_{m \times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 故没有基础解系;

当 $R(\boldsymbol{A}) = r < n$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}_{m \times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中必含有 $n-r$ 个向量.

第二步, 在行最简形中选择非零首元所在列对应的 r 个变量为主变量, 其余 $n-r$ 个为自由变量. 写出与行最简形等价的方程组, 并用自由变量表示主变量.

第三步, 令这 $n-r$ 个为自由变量依次取 1, 其余取 0, 把它们代入上述方程组中, 就得到方程组的 $n-r$ 个解向量, 这 $n-r$ 个解向量就构成方程组的一个基础解系.

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵 A 作初等行变换, 变为行最简矩阵, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(A) = 2 < 4$, 故方程组有无穷多解, 而 $n-r = 4-2 = 2$, 所以基础解系中有 2 个线性无关的解向量.

由系数矩阵 A 初等行变换的结果可得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 对应应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$,

即得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可见 $R(A) = r = 2 < 5 = n$ 故方程组有无穷多解, 而 $n - r = 3$, 其基础解系中有三个线性无关的解向量.

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 将其代入方程组}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$\text{依次得 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $\mathbf{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(二) 非齐次线性方程组的解的结构

一般地, 非齐次线性方程组的解向量具有如下性质:

性质3 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_2$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

性质4 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ 仍就是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.

由非齐次线性方程组解的性质不难得出: 若 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 满足 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = r < n$, 此时 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 它的通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r} \boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}^*$$

其中 $k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + k_2 \boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r} \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解, $\boldsymbol{\eta}^*$ 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

例3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

例4 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解? 并求出它的解.

三、巩固练习

求基础解系 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$

四、小结

1. 齐次、非齐次线性方程组解的结构;
2. 齐次、非齐次线性方程组求解的方法。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

一、教学亮点

探究学习与总结反思相结合: 鼓励学生通过查阅资料、进行实验等方式自主探索线性方程组解的结构, 这不仅培养了学生的自主学习和解决问题的能力, 还激发了他们的好奇心和求知欲。同时, 在教学结束时引导学生进行总结反思, 帮助他们巩固所学内容, 提高自我认知和自我调整的能力。

二、教学不足

1. 个别学生参与度不高: 虽然大部分学生都积极参与了小组讨论, 但仍有少数学生显得不够主动。

这可能与他们的学习基础、兴趣点或性格特点有关。未来我需要更加关注这些学生的需求，采取个性化的教学策略来激发他们的学习兴趣。

2. 缺乏深入探究：在教学过程中，我主要关注了学生对线性方程组解的基本概念和性质的掌握情况，但在深入探究解的结构背后的数学原理方面做得还不够。未来我需要设计更多的探究性学习任务，引导学生深入理解解的结构是如何得出的。

三、改进措施

1. 提高个别学生参与度：为了激发更多学生的学习兴趣 and 参与度，我可以采取个性化的教学策略，如设计具有挑战性的学习任务、提供个性化的学习资源和指导等。同时，我也可以在课堂上更多地关注这些学生的表现，给予他们更多的鼓励和支持。

2. 加强深入探究：为了引导学生深入理解线性方程组解的结构背后的数学原理，我可以设计更多的探究性学习任务，如引导学生探究不同维度下线性方程组解的结构特点、探究解的结构与矩阵秩的关系等。通过这些任务，学生可以更加深入地理解线性方程组解的结构，提高数学素养和综合能力。