

授课题目	§ 4.1 预备知识	课次：16
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 了解内积、内积的性质；</p> <p>(2) 掌握施瓦茨不等式、向量长度、单位向量、正交、向量夹角等概念；</p> <p>(3) 掌握施密特正交化方法</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 计算技能：学生应能够准确计算给定向量的内积，包括直接计算和通过坐标计算两种方式；能够运用向量内积的运算性质进行复杂的计算。</p> <p>(2) 问题解决能力：学生应能够利用向量内积的概念和性质解决相关问题，如判断两个向量是否垂直、计算向量的夹角等；能够将实际问题抽象为向量内积问题，并运用所学知识进行求解。</p> <p>(3) 抽象思维和逻辑推理能力：通过学习向量内积的概念和性质，培养学生的抽象思维能力；引导学生运用逻辑推理方法解决向量内积问题，提高他们的逻辑推理能力。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 学习兴趣和动力：通过生动有趣的教学内容和教学方法，激发学生的学习兴趣 and 求知欲；引导学生关注向量内积在实际问题中的应用，增强他们的学习动力。</p> <p>(2) 严谨的数学态度：在教学过程中，强调向量内积计算的准确性和严谨性，培养学生的严谨数学态度；鼓励学生勇于质疑、敢于探索，培养他们的批判性思维 and 创新能力。</p>	
教学重点	施密特正交化方法	
教学难点	施密特正交化方法	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、练习巩固法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>之前学习过一些向量的运算，内积是怎样的一种运算呢？</p> <p>二、讲授新课</p> <p>(一) 向量的内积</p> <p>在空间解析几何中，向量 \boldsymbol{a} 和 \boldsymbol{b} 的数量积或称内积定义为</p> $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \boldsymbol{b} \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$ <p>其坐标表达式为</p> $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$ <p>其中 \boldsymbol{a} 和 \boldsymbol{b} 的坐标分别为</p> $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3).$ <p>由此可得</p>		

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|}.$$

现在将上面的概念推广到 n 维向量.

定义 1 设 n 维向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 向量 α 与 β 的内积记作

(α, β) , 规定

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \alpha^T \beta.$$

内积是向量间的一种运算, 其运算结果是一个实数.

根据定义, 容易验证 α 与 β 的内积具有下列性质:

- (1) 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
- (2) 线性性: $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
 $(\lambda \alpha, \beta) = (\alpha, \lambda \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$;
- (3) 非负性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

其中, α, β, γ 为 n 维向量, λ 为任意实数.

由向量 α 与其自身内积的非负性, 可以类似空间解析几何用内积来定义向量的长度 (也称为范数).

定义 2 设 n 维向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 将向量 α 的长度 (也称作范数) 定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2},$$

当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量; 对非零向量 α , 称 $\alpha^0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为 α 的单位向量,

并称此过程为向量的单位化 (规范化).

向量的长度具有如下性质:

- (1) 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时 $\|\alpha\| = 0$;
- (2) 齐次性 $\|\lambda \alpha\| = |\lambda| \|\alpha\|$;
- (3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$;

$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$, 等号仅当 α 与 β 线性相关时才成立. 这个不等式称为

Cauchy-schwarz 不等式 (证明略) .

由此不等式可知,

$$\left| \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|} \right| \leq 1 \quad (\text{当 } \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \text{ 时}),$$

于是定义两向量的夹角如下:

定义 3 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, 规定

$$\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

称为向量 α 与 β 的夹角.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 即 $(\alpha, \beta) = 0$ 时, 称向量 α 与 β 正交或垂直.

显然零向量与任何向量均正交.

例 1 设 $\alpha = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 问 α 与 β 是否正交, 并将 α, β 单位化.

解

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = (-3, 2, -1, 4) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 4 \times 3 = 0,$$

则 α 与 β 正交, 又

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{30}, \quad \|\beta\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{30},$$

则

$$\alpha^0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}; \quad \beta^0 = \frac{\beta}{\|\beta\|} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

(二) 正交向量组

定义 4 由两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组; 由单位向量

组成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

下面介绍正交向量组与线性无关向量组之间的关系.

定理 1 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 即不含零向量的正交向量组必为线性无关向量组.

证明 设有数 k_1, k_2, \dots, k_r 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0}.$$

用 α_1^T 左乘上式可得

$$k_1 \alpha_1^T \alpha_1 + k_2 \alpha_1^T \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_1^T \alpha_r = 0,$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是正交向量组, 可知

$$\alpha_1^T \alpha_1 = \|\alpha_1\|^2 \neq 0, \quad \alpha_1^T \alpha_j = 0, \quad (j = 2, 3, \dots, r).$$

进而可得

$$k_1 \alpha_1^T \alpha_1 = k_1 \|\alpha_1\|^2 = 0,$$

故

$$k_1 = 0.$$

同理可证 $k_2 = k_3 = \dots = k_r = 0$, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

注意 定理 1 的逆命题不成立, 即不能保证所有的线性无关向量组均为正交向量组, 但是我们可以借助于下面的方法, 将一个线性无关的向量组转化为等价的正交向量组.

(三) 施密特 (Schmidt) 正交化

定理 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一个线性无关向量组, 令

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{\|\beta_1\|^2} \beta_1, \\ &\vdots \\ \beta_r &= \alpha_r - \frac{(\beta_1, \alpha_r)}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_r)}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 - \dots - \frac{(\beta_{r-1}, \alpha_r)}{\|\beta_{r-1}\|^2} \beta_{r-1}. \end{aligned}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 等价的正交向量组.

该方法称为**施密特正交化方法**. 若再进一步, 将 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 单位化后, 可得到一个与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 等价的标准正交向量组.

下面以 3 维向量为例, 用图示的方法, 揭示施密特正交化的思路与过程.

可按图 1 来取 β_1 与 β_2 , 由 β_1, β_2 正交且与 α_1, α_2 等价, 即

$$(\beta_1, \beta_2) = 0,$$

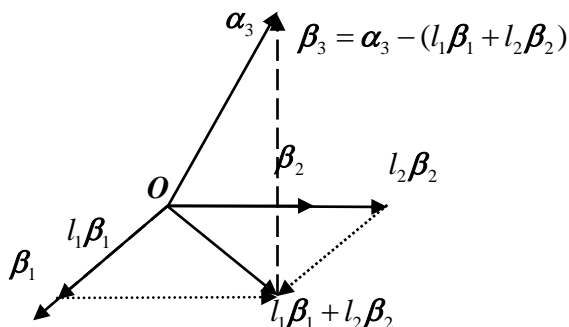
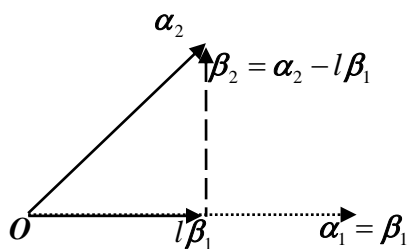
可求得

$$l = \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{\|\beta_1\|^2}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{\|\beta_1\|^2} \beta_1.$$

求得 β_1 与 β_2 后, 再按图 4-2 所示取 $\beta_3 = \alpha_3 - (l_1\beta_1 + l_2\beta_2)$, 由

$$(\beta_1, \beta_3) = 0, \quad (\beta_2, \beta_3) = 0,$$

可类似求得 l_1 和 l_2 , 即得到 β_3 , 此时向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 即为与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交向量组.



例 2 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 试将向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 标准正交

化.

解 先采用施密特正交化的方法将向量组正交化. 取

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{\|\beta_2\|^2} \beta_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}\sqrt{6})^2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

再将向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化, 得

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \quad \xi_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则向量组 ξ_1, ξ_2, ξ_3 即为与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的标准正交向量组.

例3 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求非零向量 α_2, α_3 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

解 设 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 与 α_1 正交, 则有

$$(\alpha_1, \alpha) = \alpha_1^T \alpha = 0,$$

即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

进而

$$x_1 = -x_2 - x_3,$$

其中 x_2, x_3 为自由未知量,

由此得到该齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

对其基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

采用施密特正交化的方法可得

$$\alpha_2 = \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_3 = \xi_2 - \frac{(\alpha_2, \xi_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 α_2, α_3 即为所求.

(四) 正交矩阵及正交变换

定义 5 若 n 阶方阵 A 满足 $A^T A = E$ (即 $A^{-1} = A^T$), 则称 A 为正交矩阵.

由定义 5 不难得出正交矩阵具有下列性质: (设 A 与 B 为同阶正交矩阵)

- (1) A 可逆, 且 $A^{-1} = A^T$;
- (2) A^T 与 A^{-1} 均为正交矩阵;
- (3) $|A| = 1$, 或 $|A| = -1$;
- (4) AB 也为正交矩阵.

例 4 设 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 判断 A 是否为正交矩阵.

解

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

则由定义 4-5 可知 A 是正交矩阵.

例 5 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 验证 A 为正交矩阵.

进一步, 有下面的结果.

定理 3 方阵 \mathbf{A} 为正交矩阵的充分必要条件是 \mathbf{A} 的列向量组为标准正交向量组. (证明略).

我们一般利用定义 5 或定理 3 来判别一个矩阵是否为正交矩阵.

例 6 设 $\mathbf{A} = \mathbf{E} - 2\alpha\alpha^T$, 其中 α 为 n 维单位列向量, 证明 \mathbf{A} 为正交矩阵.

证明 易知

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{E} - 2\alpha\alpha^T)^T = \mathbf{E} - 2(\alpha\alpha^T)^T = \mathbf{E} - 2\alpha\alpha^T$$

由

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{A} &= (\mathbf{E} - 2\alpha\alpha^T)(\mathbf{E} - 2\alpha\alpha^T) = \mathbf{E} - 4\alpha\alpha^T + 4(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) \\ &= \mathbf{E} - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = \mathbf{E} - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\|\alpha\|^2\alpha^T,\end{aligned}$$

又 α 为 n 维单位列向量, 可知 $\|\alpha\| = 1$, 从而 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$, 因此 \mathbf{A} 为正交矩阵.

例 7 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 求 a, b .

解 因为 \mathbf{A} 为正交矩阵, 由定理 4-3 可知, \mathbf{A} 的列向量组为标准正交向量组, 即列向量均为单位向量, 可得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \end{cases},$$

解得

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又正交矩阵的列向量两两正交, 即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0,$$

可得

$$a = -b.$$

因此

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

相应的正交矩阵有下列 2 个:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

定义 6 若 P 为正交矩阵, 则称线性变换 $y = Px$ 为正交变换.

设 $y = Px$ 为正交变换, x_1, x_2 为 n 维列向量, $y_1 = Px_1$, $y_2 = Px_2$, x_1, x_2 的夹角为 θ , y_1, y_2 的夹角为 φ , 由定义 4-6 可得,

$$\begin{aligned} \|y\| &= \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T P x} = \sqrt{x^T (P^T P) x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|, \\ (y_1, y_2) &= y_1^T y_2 = (Px_1)^T (Px_2) = x_1^T P^T P x_2 = x_1^T x_2 = (x_1, x_2), \\ \varphi &= \arccos \left(\frac{(y_1, y_2)}{\|y_1\| \|y_2\|} \right) = \arccos \left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\| \|x_2\|} \right) = \theta, \end{aligned}$$

其中 $\|x\|$ 表示向量的长度, 这说明正交变换保持向量的内积、长度和夹角不变, 因而在空间中保持几何图形不变, 这正是正交变换的特性.

三、巩固练习

判断下列矩阵是否为正交矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

四、小结

1. 向量的内积与长度;
2. 将一组向量规范正交化的方法;
3. 判断正交矩阵的条件。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

经过本次向量的内积教学, 我深刻反思了整个教学过程, 从准备阶段到实施阶段, 再到学生的反馈和评估, 都为我提供了宝贵的经验和教训。以下是我对这次教学的几点反思:

一、教学目标明确性

在教学准备阶段, 我明确了向量内积的教学目标, 包括理解内积的定义、掌握内积的计算方法、

理解内积的几何意义和物理意义等。然而，在实际教学中，我发现有些学生对内积的几何意义理解不够深入，这提示我在未来的教学中需要更加注重几何直观的引入和解释。

二、教学方法多样性

我采用了讲授法、练习巩固法等多种教学方法来教授向量内积。这些方法在一定程度上帮助学生理解和掌握了内积的概念和性质。然而，我也发现，有些学生在面对复杂的计算和推理时仍然感到困难。因此，我需要进一步探索更适合学生的教学方法，如引入更多的实际案例、采用更加直观的教学工具等。

三、学生参与积极性

在教学过程中，我注重激发学生的学习兴趣 and 积极性。通过小组讨论、课堂练习和课后作业等方式，我鼓励学生积极参与课堂活动。然而，我也注意到，有些学生在课堂上表现不够积极，可能是因为他们对内积的概念不够熟悉或者对教学方法不适应。因此，我需要进一步关注学生的个体差异，采用更加灵活多样的教学策略来激发学生的学习兴趣。

四、教学效果评估

在教学结束后，我通过课堂测试、作业批改和课后反馈等方式对学生的学习效果进行了评估。评估结果显示，大部分学生能够理解和掌握向量内积的概念和性质，但仍有少数学生存在困难。这提示我在未来的教学中需要更加注重个体差异的关注和辅导，同时加强对学生学习效果的跟踪和评估。

五、改进措施

针对以上反思，我计划采取以下改进措施来提高向量内积的教学效果：

加强几何直观的引入和解释，帮助学生更深入地理解内积的几何意义。

探索更多适合学生的教学方法，如引入实际案例、采用更加直观的教学工具等。

关注学生的个体差异，采用更加灵活多样的教学策略来激发学生的学习兴趣。

加强对学生学习效果的跟踪和评估，及时发现并解决学生学习中的困难。

通过这次教学反思，我深刻认识到教学是一个不断改进和完善的过程。我将继续努力，不断提高自己的教学水平，为学生提供更加优质的教育服务。

授课题目	§ 4.2 矩阵的特征值与特征向量		课次：17
教学目的	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 掌握特征值、特征向量的概念、性质及求法。</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 计算能力：能够熟练运用特征值与特征向量的求解方法，准确计算给定矩阵的特征值和特征向量。</div> <div>(2) 应用能力：能够利用特征值与特征向量解决实际问题，如求解线性变换的对角矩阵表示、分析振动系统的稳定性等。</div> <div>(3) 推理能力：培养学生的逻辑推理能力，使其能够根据已知条件，推导出特征值与特征向量的相关结论。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 激发兴趣：通过生动有趣的实例和案例，激发学生对特征值与特征向量学习的兴趣，培养其主动探索数学奥秘的意愿。</div> <div>(2) 培养耐心：在计算特征值与特征向量的过程中，培养学生的耐心和细心，使其能够面对复杂的计算过程而不失耐心。</div> <div>(3) 团队合作：通过小组讨论、合作学习等方式，培养学生的团队协作精神和沟通能力，使其能够在团队中共同解决问题。</div> <div>(4) 创新意识：鼓励学生提出新的问题和想法，培养其创新意识和解决问题的能力，使其能够在数学学习中不断挑战自我、超越自我。</div>		
教学重点	特征值与特征向量的求法		
教学难点	特征值与特征向量的求法		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、实例分析法、练习巩固法、讨论探究法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<div>一、复习引入</div> <div>为了定量分析工业发展与环境污染的关系，某地区提出如下的增长模型：设 a_0 为该地区目前的污染损耗（由土壤、河流、湖泊及大气污染指数测得），b_0 是该地区目前的工业产值.以 5 年为一个发展周期，一个周期后的污染损耗和工业产值分别记为 a_1 和 b_1，它们之间的关系是</div> <div>$a_1 = \frac{8}{3}a_0 - \frac{1}{3}b_0, b_1 = -\frac{2}{3}a_0 + \frac{7}{3}b_0$</div> <div>写成矩阵形式为</div> <div>$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_0$</div>			

其中 $\eta_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \eta_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

如果当前水平 $\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则

$$\eta_1 = A\eta_0 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{即 } \eta_1 = A\eta_0 = 2\eta_0$$

由此可以预测 n 个周期后的污染损耗和工业产值:

$$\eta_n = 2\eta_{n-1} = 2^2\eta_{n-2} = \cdots = 2^n\eta_0$$

以上运算中, 表达式 $A\eta_0 = 2\eta_0$ 反映了矩阵 A 的特征值 2 和特征向量 η_0 的关系问题.

二、讲授新课

(一) 特征值与特征向量的概念

定义 1 设 A 是 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零列向量 x , 使等式

$$Ax = \lambda x$$

成立, 则称数 λ 为方阵 A 的特征值, 非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注意: 特征值和特征向量问题是针对方阵而言.

特征值 λ 可以为 0 也可以不为 0, 但特征向量必为非零向量;

零矩阵 O 只有零特征值.

不难看出等式

$$Ax = \lambda x$$

也可写成

$$(A - \lambda E)x = 0$$

这是 n 个方程构成的 n 元齐次线性方程组, 其非零解即为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 而齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式为零, 即

$$|A - \lambda E| = 0.$$

上式是以 λ 为未知量的方程, 称此方程为方阵 A 的特征方程, 显然方阵 A 的特征值就是特征方程的根.

设 $\lambda = \lambda_i$ 为方阵 A 的特征值, 则由齐次线性方程组

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

可求得非零解 $\mathbf{x} = \mathbf{p}_i$ ，则 \mathbf{p}_i 便是 \mathbf{A} 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

不难看出若 \mathbf{p}_i 是 \mathbf{A} 的对应于特征值 λ_i 的特征向量，则 $k\mathbf{p}_i$ ($k \neq 0$) 也为 \mathbf{A} 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

由此可得方阵 \mathbf{A} 的特征值及特征向量的求法如下：

(1) 令 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ ，求出特征值 λ_i ；

(2) 将特征值 λ_i 代入 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，解相应的齐次线性方程组，其基础解系即为方阵 \mathbf{A} 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

例1 求 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解 令

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 3$ ， $\lambda_2 = 5$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时，解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，由

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

则 \mathbf{p}_1 为 \mathbf{A} 的对应于 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量，而 $k\mathbf{p}_1$ ($k \neq 0$) 为对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量；

当 $\lambda_2 = 5$ 时，解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 \mathbf{p}_2 为 \mathbf{A} 的对应于 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量，而 $k\mathbf{p}_2$ ($k \neq 0$) 为对应于 $\lambda_2 = 5$ 的全

部特征向量.

例2 求 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解 令

$$|A - \lambda E| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda)-4] = -(\lambda-3)^2(\lambda+2) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (二重根), $\lambda_3 = -2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 时, 解齐次线性方程组 $(A - 3E)x = 0$, 由

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 4r_2]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 p_1 为 A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 的特征向量, 而 kp_1 ($k \neq 0$) 为对应于二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 的全部特征向量;

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 解齐次线性方程组 $(A + 2E)x = 0$, 由

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}r_2]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$p_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 p_2 为 A 的对应于 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量, 而 kp_2 ($k \neq 0$) 为对应于单特征值

$\lambda_3 = -2$ 的全部特征向量.

例3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解 令

$$|A - \lambda E| = 0,$$

即

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &\stackrel{r_1+r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{c_2-c_1}{\stackrel{c_3-c_1}{=}} (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0. \end{aligned}$$

得 A 的特征值为, $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (二重根).

当 $\lambda_1 = 5$ 时, 解齐次线性方程组 $(A - 5E)x = 0$, 由

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{r_1+r_2+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{r_2-r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{-\frac{1}{6}r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 p_1 为 A 的对应于 $\lambda_1 = 5$ 的特征向量, 而 $k_1 p_1$ ($k_1 \neq 0$) 为 A 的对应于特征值

$\lambda_1 = 5$ 的全部特征向量;

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时, 解 $(A + E)x = 0$, 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{r_2-r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\frac{1}{2}r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 p_2, p_3 均为 A 的对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量, 而 $k_2 p_2 + k_3 p_3$ (k_2, k_3 不全为零) 为 A 的对应于二重特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的全部特征向量.

(二) 特征值及特征向量的性质

例4 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的两个特征值为 λ_1, λ_2 , 求 $\lambda_1 + \lambda_2$ 及 $\lambda_1 \cdot \lambda_2$.

解 令

$$|A - \lambda E| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

根据一元二次方程根与系数的关系, 有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|.$$

更一般地, 利用 n 次多项式方程根与系数的关系, 可得

性质1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 n 阶方阵 A 的 n 个特征值, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|,$$

其中 $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ 即 A 的主对角元素之和, 称为方阵 A 的迹, 记作

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

推论 方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的特征值均不为零.

证明 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为方阵 A 的 n 个特征值, 则由

A 可逆的充分必要条件是

$$|A| \neq 0,$$

结合性质1可知,

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$$

可知 A 的特征值均不为零.

此外, 矩阵的特征值及特征向量还有以下性质:

性质2 设 A 的特征值为 λ , p 为 A 的对应于 λ 的特征向量, 则 kp ($k \neq 0$) 也为 A 的对应于 λ 的特征向量.

性质3 设 λ 为 A 的特征值, p 是对应的特征向量, k 是正整数, 则 λ^k 为 A^k 的特征值, p 仍是对应的特征向量.

证明 由已知条件可知,

$$Ap = \lambda p,$$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{p} = \mathbf{A}^{k-1} (\mathbf{A} \mathbf{p}) = \lambda \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{p} = \cdots = \lambda^k \mathbf{p},$$

因此 λ^k 为 \mathbf{A}^k 的特征值, \mathbf{p} 仍是对应的特征向量.

性质 4 设 λ 为 \mathbf{A} 的特征值, \mathbf{p} 是对应的特征向量, 则

$$f(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

为

$$f(\mathbf{A}) = a_m \mathbf{A}^m + a_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{E}$$

的特征值, \mathbf{p} 仍是对应的特征向量. (读者可自行证明).

例 5 设方阵 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 证明 \mathbf{A} 的特征值为 0 或 1.

证明 设 λ 是方阵 \mathbf{A} 的特征值, 令 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$, 则由条件可知 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, 而零矩阵只有零特征值. 又因为 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 为 $f(\mathbf{A})$ 的特征值, 所以

$$\lambda^2 - \lambda = 0,$$

解得 $\lambda = 1$ 或 0 .

性质 5 方阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{A}^T 具有相同的特征值.

证明 由行列式性质可知

$$|\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{E}| = |(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^T| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|,$$

即 \mathbf{A} 与 \mathbf{A}^T 具有相同的特征多项式, 因此 \mathbf{A} 与 \mathbf{A}^T 的特征方程具有相同的根, 也即 \mathbf{A} 与 \mathbf{A}^T 具有相同的特征值.

性质 6 设 \mathbf{A} 为可逆矩阵, λ 为 \mathbf{A} 的特征值, \mathbf{p} 是对应的特征向量, 则 λ^{-1} 和 $|\mathbf{A}| \lambda^{-1}$ 分别是 \mathbf{A}^{-1} 和 \mathbf{A}^* 的特征值, 其中 \mathbf{p} 是对应的特征向量.

例 6 设 λ_1, λ_2 为 \mathbf{A} 的互不相同的特征值, 它们所对应的特征向量分别为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, 求证 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性无关.

证明 (反证法) 假设 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性相关, 则 $\mathbf{p}_2 = k\mathbf{p}_1, k \neq 0$, 易知 \mathbf{p}_2 也为 \mathbf{A} 的对应于 λ_1 的特征向量, 与已知条件矛盾, 故 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性无关.

更一般地, 有下面的性质

性质 7 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为方阵 \mathbf{A} 的互不相同的特征值, 所对应的特征向量分别为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$, 则 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$ 线性无关.

例 6 设 α, β 分别是矩阵 \mathbf{A} 的对应于 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 求证 $\alpha + \beta$ 一定不是 \mathbf{A} 的特征向量.

证明 (反证法) 假设 $\alpha + \beta$ 是 \mathbf{A} 的特征向量, 则有

<div>$A(\alpha + \beta) = \lambda_3(\alpha + \beta),$<p>即有</p>$A\alpha + A\beta = \lambda_3\alpha + \lambda_3\beta,$<p>进而可得</p>$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = \lambda_3\alpha + \lambda_3\beta,$<p>整理可得</p>$(\lambda_1 - \lambda_3)\alpha + (\lambda_2 - \lambda_3)\beta = 0.$<p>由已知条件 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，可得 α, β 线性无关，易知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 与已知矛盾，故 $\alpha + \beta$ 一定不是 A 的特征向量.</p><p>三、巩固练习</p><p>求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量</p><p>四、小结</p><ol style="list-style-type: none">1. 特征值与特征向量的概念；2. 特征值与特征向量的求法；3. 特征值与特征向量的性质。<p>五、布置作业</p><p>学习通作业</p></div>	
---	--

<div><p>教学反思：</p><p>经过本次矩阵的特征值与特征向量的教学，我进行了深入的反思，旨在总结经验、发现问题并提出改进措施。以下是我对这次教学的几点反思：</p><p>一、教学内容与结构</p><p>在本次教学中，我系统地介绍了矩阵特征值与特征向量的定义、性质、求解方法以及应用。从教学内容上看，我力求全面覆盖，但在实际授课过程中，我发现部分学生对特征值与特征向量的几何意义理解不够深入，这可能与我在讲解时未能充分结合几何图形和实例有关。因此，在未来的教学中，我需要更加注重几何直观的引入，通过图形和实例帮助学生更好地理解特征值与特征向量的概念。</p><p>二、教学方法与手段</p><p>我采用了讲授法、实例分析法、练习巩固法和讨论探究法等多种教学方法。这些方法在一定程度上帮助学生理解和掌握了特征值与特征向量的相关知识。然而，我也发现，部分学生在面对复杂的计算和推理时仍然感到困难。这提示我在未来的教学中，需要更加注重培养学生的计算能力和逻辑推理能力。同时，我也应该尝试引入更多的互动式教学手段，如提问与回答、课堂讨论等，以激发学生的学习兴趣 and 积极性。</p><p>三、学生参与度与反馈</p><p>在教学过程中，我注重与学生的互动，通过提问、讨论等方式鼓励学生积极参与。然而，我也注意到，部分学生在课堂上表现不够积极，可能是因为他们对特征值与特征向量的概念不够熟悉或者对教学方法不适应。这提示我在未来的教学中，需要更加关注学生的个体差异，采用更加灵活多</p></div>
--

样的教学策略来满足不同学生的学习需求。同时，我也应该加强与学生的沟通，及时收集他们的反馈意见，以便更好地调整教学方法和进度。

四、教学效果评估与改进

在教学结束后，我通过课堂测试、作业批改和课后反馈等方式对学生的学习效果进行了评估。评估结果显示，大部分学生能够理解和掌握特征值与特征向量的相关知识，但仍有少数学生存在困难。这提示我在未来的教学中，需要更加注重对困难学生的辅导和帮助，同时加强对学生学习效果的跟踪和评估。为了改进教学效果，我计划采取以下措施：一是加强几何直观的引入和解释；二是注重培养学生的计算能力和逻辑推理能力；三是采用更加灵活多样的教学策略来满足不同学生的学习需求；四是加强与学生的沟通，及时收集他们的反馈意见，以便更好地调整教学方法和进度。

通过这次教学反思，我深刻认识到教学是一个不断改进和完善的过程。我将继续努力，不断提高自己的教学水平，为学生提供更加优质的教育服务。同时，我也希望能够在未来的教学中，不断探索和创新，以更好地满足学生的学习需求和发展要求。

授课题目	§ 4.3 相似矩阵与矩阵对角化	课次：18
教学目的	<p>1. 知识目标</p> <p>（1）掌握相似矩阵的概念；</p> <p>（2）掌握方阵对角化的方法.</p> <p>2. 能力目标</p> <p>（1）计算能力：学生应能够熟练运用相似矩阵和矩阵对角化的相关公式和方法，进行具体的计算和推导；学生应能够准确求解矩阵的特征值和特征向量，并构造出相似变换矩阵。</p> <p>（2）应用能力：学生应能够将相似矩阵和矩阵对角化的知识应用于实际问题中，如求解线性方程组的解、分析矩阵的性质等；学生应能够利用对角化后的矩阵简化计算过程，提高解题效率。</p> <p>（3）推理能力：学生应能够根据已知条件，推导出相似矩阵和矩阵对角化的相关结论；学生应能够运用逻辑推理和数学证明的方法，验证相似矩阵和矩阵对角化的性质和定理。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>（1）激发学习兴趣：通过生动有趣的实例和案例，激发学生对相似矩阵和矩阵对角化的学习兴趣；引导学生认识到相似矩阵和矩阵对角化在数学和实际应用中的重要性，培养他们的学习动力。</p> <p>（2）培养严谨态度：在教学过程中，注重培养学生的严谨态度和科学精神。要求学生认真对待每一个计算步骤和推导过程，确保结果的准确性和可靠性；引导学生学会质疑和反思，培养他们的批判性思维和独立思考能力。</p>	
教学重点	方阵对角化的方法	
教学难点	方阵对角化的方法	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、实例分析法、练习巩固法、探究教学法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>复习求特征值与特征向量的方法</p> <p>二、讲授新课</p> <p>（一）相似矩阵与相似变换的概念及性质</p> <p>定义 1 设 A 与 B 为 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P 使得等式</p> $P^{-1}AP = B$ <p>成立，则称矩阵 A 与 B 相似或称矩阵 B 是 A 的相似矩阵，对 A 进行 $P^{-1}AP$ 运算称为对 A 进行相似变换，可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.</p> <p>若相似变换矩阵 P 是正交矩阵，则称 A 与 B 正交相似；$P^{-1}AP$ 称为对 A 进行正交相似变换.</p>		

注意 若 P 是正交矩阵, 则 $P^{-1} = P^T$, 因此正交相似变换 $P^{-1}AP = P^TAP$.

相似具有下列性质:

- (1) 反身性 A 与 A 相似;
- (2) 对称性 若 A 与 B 相似, 则 B 与 A 相似;
- (3) 传递性 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似;

相似矩阵具有如下性质:

性质1 相似矩阵具有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

注 上述性质的逆命题不成立. 即若 A 与 B 具有相同的特征多项式 (或所有特征值相同), A 与 B 不一定相似.

性质2 相似矩阵具有相同的行列式和相同的迹.

性质3 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

性质4 若 $A \sim B$, 则 $A^m \sim B^m$.

性质5 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

性质6 若 $A \sim B$, 对于任意多项式 $f(x)$, 有 $f(A) \sim f(B)$.

性质7 若 $A \sim B$, η 是 A 的属于 λ 的特征向量, 则 $P^{-1}\eta$ 是 B 的属于 λ 的特征向量.

(二) 方阵的相似对角化

定义2 若方阵 A 与对角矩阵 Λ 相似, 则称方阵 A 可相似对角化.

例1 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{10} .

解 由条件

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

可得

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

则有

$$A^2 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^2 P^{-1},$$

$$A^3 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^3 P^{-1}, \dots,$$

$$A^{10} = P\Lambda^{10} P^{-1},$$

进而

$$\begin{aligned} A^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 2^{10} \\ (-1)^{10} & 2 \times 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{10} & 2^{10}-1 \\ 2-2^{11} & -1+2^{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

本例表明通过相似对角化可简化繁琐的矩阵高次幂运算.

定理 1 若方阵 A 相似于对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 必

为 A 的特征值.

证明 由于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 Λ 的特征值, 且方阵 A 与 Λ 相似, 则由性质 (5) 可得 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

根据性质我们不难得出, 若 A 相似于对角矩阵, 则对角矩阵的对角元必定为 A 的全部特征值. 但是并非所有方阵都可相似对角化.

例 2 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可相似对角化.

解 显然 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 假设 A 可相似对角化, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵. 由相似对角化的性质可知, Λ 的对角元全为 1, 也即

$$\Lambda = E.$$

进而, 可得

$$A = PAP^{-1} = PEP^{-1} = E$$

与已知条件矛盾. 假设不成立, 因此 A 不可相似对角化.

下面讨论方阵可相似对角化的条件.

定理 2 n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 必要性 由于 n 阶方阵 A 可相似对角化, 即存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则有

$$AP = PA = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

将 P 用其列向量表示为

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n),$$

则有

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$(Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n),$$

于是有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

可见 λ_i 为 A 的特征值, 而可逆矩阵 P 的列向量 p_i 就是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 由于矩阵 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 可逆, 故 $R(P) = R(p_1, p_2, \cdots, p_n) = n$, 因此向量组 p_1, p_2, \cdots, p_n 线性无关, 也即 A 有 n 个线性无关的特征向量.

充分性 设 A 有 n 个线性无关的特征向量 p_1, p_2, \cdots, p_n , 所对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则有

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

构造矩阵 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 使得

$$(Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n),$$

即

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则有

$$AP = P\Lambda = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由于 p_1, p_2, \dots, p_n 线性无关, 可知矩阵 P 可逆, 于是可得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

因此方阵 A 可相似对角化.

可用此定理来判断一方阵能否相似对角化.

注意: 若方阵 A 可相似对角化, 则相似变换矩阵 P 的列向量恰为 A 的 n 个线性无关的特征向量, 对角阵 Λ 的对角元恰好为 A 的 n 个特征值, 并且特征值在 Λ 中的排列次序与特征向量在 P 中的排列次序相对应.

用此定理判别方阵能否相似对角化, 要求出属于每个特征值的特征向量, 并且要验证特征向量的线性相关性. 对于具体矩阵讨论时, 下面的推论更为简便.

推论 若 n 阶方阵 A 的特征值都是互不相同的, 则 A 可相似对角化.

注意: 逆命题不成立, 即 A 可相似对角化, n 阶方阵 A 的特征值未必无不相同.

对于 n 阶方阵 A 有重特征值的情况, 我们不加证明的给出下列定理:

定理 3 n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数恰好等于其重数.

例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵, 并求出 Λ .

解 令

$$|A - \lambda E| = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

解得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (二重根)。

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

令

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 \mathbf{P} 可逆, 且

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例4 设2阶方阵 \mathbf{A} 的特征值为1, -5, 相对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } \mathbf{A}.$$

解 由已知条件可得相似变换矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

对角阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

且

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A},$$

则

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}.$$

注意到

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

于是

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

例5 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y .

解 由于 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, 且 \mathbf{B} 为对角矩阵, 可知的 \mathbf{A} 特征值分别为

$$\lambda_1 = y, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4.$$

将 $\lambda_2 = 2$ 代入 \mathbf{A} 的特征方程,

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(x-2-1) = 0,$$

解得

$$x = 3.$$

再由特征值的性质

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 3 = 2 + 4 + y,$$

可得

$$y = 1,$$

故

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

通过以上讨论可知,若 A 与对角矩阵 Λ 相似,则 Λ 的主对角元都是 A 的特征值.若不计 λ_i 的排列顺序,则 Λ 具有唯一性,称 Λ 为 A 的相似标准形.

三、巩固练习

设矩阵 A 与 Λ 相似,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$

四、小结

1. 相似矩阵的概念与性质;
2. 方阵可相似对角化的条件与方法。

五、布置作业

学习通作业

教学反思:

授课题目	§ 4.4 实对称矩阵的对角化		课次：19
教学目标	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 掌握相似矩阵的概念；</div> <div>(2) 掌握方阵对角化的方法.</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 计算能力：学生应能够熟练运用实对称矩阵对角化的相关公式和方法，进行具体的计算和推导；学生应能够准确求解实对称矩阵的特征值和特征向量，并构造出正交矩阵。</div> <div>(2) 应用能力：学生应能够利用对角化后的矩阵简化计算过程，提高解题效率。</div> <div>(3) 分析与推理能力：学生应能够根据已知条件，推导出实对称矩阵对角化的相关结论；学生应能够运用逻辑推理和数学证明的方法，验证实对称矩阵对角化的性质和定理。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的实例和案例，激发学生对实对称矩阵对角化的学习兴趣；引导学生认识到实对称矩阵对角化在数学和实际应用中的重要性，培养他们的学习动力。</div> <div>(2) 培养严谨态度：在教学过程中，注重培养学生的严谨态度和科学精神。要求学生认真对待每一个计算步骤和推导过程，确保结果的准确性和可靠性；引导学生学会质疑和反思，培养他们的批判性思维和独立思考能力。</div>		
教学重点	方阵对角化的方法		
教学难点	方阵对角化的方法		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	讲授法、练习巩固法、讨论法		
教学时数	3 课时		
教 学 过 程			备注
<div>一、复习引入</div> <div>复习施密特正交化方法</div> <div>二、讲授新课</div> <div>(一) 实对称矩阵的性质</div> <div>定理 1 实对称矩阵的特征值都是实数.</div> <div>定理 2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.</div> <div>定理 3 设 λ_i 为实对称矩阵的 n_i 重的特征值，则矩阵 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}$ 的秩 $R(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = n - n_i$，从而恰好有 n_i 个属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.</div> <div>(证明略)</div> <div>定理 3 表明，任一 n 阶实对称矩阵 \mathbf{A} 必可以对角化.</div>			

例1 试将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 对角化.

解 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 必可对角化.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 求解齐次线性方程组 $(A - E)x = 0$,

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3 = 4$, 求解齐次线性方程组 $(A - 4E)x = 0$,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

取

$$P = (\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

由定理3知, 对于 n 阶实对称矩阵 A , 每个 n_i 重的特征值 λ_i 有 n_i 个线性无

关的特征向量,可将这 n_i 个特征向量正交化,而由定理 2 知,属于不同特征值的特征向量正交.再将上述正交向量组单位化.由此可得到 n 个两两正交的单位特征向量,以这 n 个特征向量作为列向量可构成正交矩阵 Q , 从而有

$$Q^{-1}AQ = A$$

其中 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

于是有下面定理:

定理 4 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

(二) 用正交矩阵使实对称矩阵对角化的方法

根据上述讨论, 用正交矩阵将实对称矩阵对角化的步骤可归纳如下:

(1) 求出特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的全部实特征值;

(2) 对每一个 n_i 重的特征值 λ_i , 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$, 得到 n_i 个线性无关的特征向量;

(3) 利用施密特正交化方法, 把属于 λ_i 的 n_i 个线性无关的特征向量正交化, 再单位化;

(4) 将总共得到的 n 个单位正交特征向量作为矩阵 Q 的列向量, 则 Q 为所求正交矩阵;

(5) $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵, 其主对角线上的元素为 A 的全部特征值, 它的排列顺序与 Q 中正交单位向量的排列顺序相对应.

例 2 用正交矩阵将例 1 中的矩阵对角化.

解 在例 1 中已经求出矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 对应的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

利用施密特正交化方法将 η_1 与 η_2 正交化, 得

$$\beta_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \eta_2 - \frac{(\eta_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

再单位化，得

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

将 η_3 单位化，得

$$\gamma_3 = \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

以单位正交向量 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为列得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

三、巩固练习

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，求正交矩阵 Q ，使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q$ 为对角矩阵。

<p>四、小结</p> <p>1. 实对称矩阵的性质；</p> <p>2. 用正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法。</p> <p>五、布置作业</p> <p>学习通作业</p>	
<p>教学反思：</p>	

授课题目	第四章习题课		课次：20
教学目的	复习第四章		
教学重点	方阵的特征值、特征向量及其性质和求法		
教学难点	方阵的特征值、实对称矩阵的对角化		
教学手段	板书与多媒体结合		
教学时数	1 课时		
教 学 过 程		备注	
<div><div>特征值与特征向量</div><div><div>预备知识</div><div>特征值与特征向量<ul style="list-style-type: none">特征值<ul style="list-style-type: none">定义求法特征向量<ul style="list-style-type: none">定义求法性质<ul style="list-style-type: none">属于不同特征值的特征向量线性无关n_i 重特征值至多有 n_i 个线性无关的特征向量$A = \prod \lambda_i, \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$</div><div>相似<ul style="list-style-type: none">定义性质可对角化的条件<ul style="list-style-type: none">A 有 n 个线性无关的特征向量（充要条件）$R(A - \lambda_i E) = n - n_i$$A$ 有 n 个不同的特征值（充分条件）A 是实对称矩阵</div><div>实对称矩阵<ul style="list-style-type: none">特征值必为实数属于不同特征值的特征向量正交n_i 重特征值恰有 n_i 个线性无关的特征向量可用正交矩阵对角化</div></div></div>		<div>一、填空题</div> <div>1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的特征值为_____.</div> <div>2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是_____.</div>	

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值为_____.

4. 设3阶矩阵 $A, A-E, E+2A$ 均不可逆, 则 $|A+E| =$ _____.

5. 设3阶矩阵 A 的特征值是1, 2, 3, 则矩阵 $B = A^2 - 2A + E$ 的特征值为_____.

6. 1 是 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值, 则 $a =$ _____.

7. 设4阶方阵 $A \sim B$, 其中 B 的特征值为1, -1, 2, 4, 则 $|A| =$ _____.

8. 设矩阵 $A \sim B$, A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则 $|B^{-1} - E| =$ _____.

9. 实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量_____.

10. 设 A 为 n 阶方阵, $Ax=0$ 有非零解, 则 A 必有一个特征值为_____.

二、单项选择题

1. 设3阶矩阵 A 的特征值为1, 0, -1, $f(x) = x^2 - 2x - 1$, 则 $f(A)$ 的特征值为 ().

A. -2, -1, 2 B. -2, -1, -2 C. 2, 1, -2 D. 2, 0, -2

2. n 阶矩阵 A 有 n 个不相等的特征值是矩阵 A 可相似对角化的 ().

A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 下列命题错误的是 ().

A. 属于不同特征值的特征向量线性无关
B. 属于同一特征值的特征向量线性相关
C. 相似矩阵必有相同的特征值
D. 特征值相同的矩阵不一定相似

4. 设 A 为3阶矩阵, A 的特征值为 $-2, -\frac{1}{2}, 2$, 则下列矩阵中可逆的是 ().

A. $E+2A$ B. $3E+2A$ C. $2E+A$ D. $A-2E$

5. 与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是 ().

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题

1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^3 - 3A^2 + 3A - 2E = 0$, 求 A 的特征值.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$, 试求参数 a, b 的值.

4. 判断 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 矩阵是否可对角化, 若可以对角化, 求出可逆矩阵 P ,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

教学反思: