

授课题目	§ 5.1 二次型及其矩阵表示		课次：21
教学目标	<div>1. 知识目标</div> <div>(1) 了解二次型的基本概念；</div> <div>(2) 了解线性变换与合同矩阵。</div> <div>2. 能力目标</div> <div>(1) 提高抽象思维能力：通过学习二次型及其矩阵表示，学生能够更好地理解和运用抽象数学概念，提高抽象思维能力。</div> <div>(2) 增强问题解决能力：学生能够运用所学知识解决与二次型及其矩阵表示相关的问题，如求二次型的矩阵、判断二次型的正负定性等。</div> <div>(3) 培养数学应用能力：通过学习二次型及其矩阵表示在各个领域的应用，学生能够培养将数学知识应用于实际问题的能力。</div> <div>3. 情感与态度目标</div> <div>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的教学案例和实践活动，激发学生对二次型及其矩阵表示的学习兴趣，培养探究精神。</div> <div>(2) 培养严谨的数学态度：在学习过程中，学生能够逐步养成严谨的数学思维习惯，对待数学问题一丝不苟，注重逻辑推理和证明过程。</div>		
教学重点	二次型的基本概念		
教学难点	二次型的矩阵表示		
教学手段	板书与多媒体结合、学习通		
教学方法	问题引入法、引导发现教学法		
教学时数	2 课时		
教 学 过 程			备注
<div>一、复习引入</div> <div>二次型就是二次齐次多项式，有关二次型的理论起源于对解析几何中二次曲线的研究. 在解析几何中有心二次曲线，当中心与坐标原点重合时，其一般方程为</div> <div>$ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$</div> <div>为了便于研究这个二次曲线的几何性质，可以作适当的坐标旋转变换（逆时针旋转 θ）</div> <div>$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$</div> <div>将曲线方程消去 xy 项，化为标准形</div> <div>$mx'^2 + ny'^2 = 1.$</div> <div>类似的问题不仅在几何中出现，在数学的其他分支，以及物理、力学和网络计算中也会遇到.</div>			

现将此类问题一般化, 讨论如何化简二次齐次多项式, 也就是接下来要讨论的二次型问题. 本节将讨论二次型的一般理论, 包括二次型的化简以及正定二次型的性质等.

二、讲授新课

(一) 二次型的基本概念

定义 1 含有 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \quad (2)$$

称为 n 元二次型. 当 a_{ij} 中有复数时, 称之为复二次型. 当 a_{ij} 全为实数时, 称之为实二次型. 我们下面仅讨论实二次型.

上述二次型 (2) 中如规定 $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, 于是 (2) 式可以写成

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ = & \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \quad (3)$$

记 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 则二次型 (3) 可记作

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中 \mathbf{A} 为对称矩阵. 我们把 \mathbf{A} 称为二次型 f 的矩阵, 把 f 称为对称矩阵 \mathbf{A} 的二次型, \mathbf{A} 的秩称为二次型 f 的秩, 记为 $R(f)$.

由上面的讨论可知,任给一个二次型,都能唯一地确定一个对称阵;反过来,任给一个对称阵,都能唯一确定一个二次型.因此,二次型与对称阵之间存在一一对应的关系.

例1 写出三元二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 14x_2x_3$ 的矩阵和矩阵表示式.

解 因为 $a_{11} = 1, a_{22} = 5, a_{33} = 9, a_{12} = a_{21} = 3, a_{13} = a_{31} = 5, a_{23} = a_{32} = 7$, 所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

其矩阵表示式为

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

注 由矩阵的乘法可知

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 14x_2x_3$$

但上式不是二次型的矩阵表示.

例2 设对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

则矩阵 A 所对应的二次型为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3 \end{aligned}$$

例3 二元二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$, 求 $R(f)$.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

显然 $R(A) = 2$, 故 $R(f) = 2$.

(二) 线性变换与合同矩阵

定义2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 为两组变量, 称关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

为由 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个线性变换.

记

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

则线性变换 (4) 可写成

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} \quad (4)',$$

上式中矩阵 \mathbf{C} 称为变换的系数矩阵. 若 \mathbf{C} 可逆, (4) 或 (4)' 称为可逆线性变换

(或称满秩线性变换、非退化线性变换), 此时有 $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$; 若 \mathbf{C} 不可逆, 则称为不可逆线性变换 (或称降秩线性变换、退化线性变换); 若 \mathbf{C} 为正交矩阵, 则称为正交变换.

如果对 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 进行可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 则有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C})$$

因为

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{C}^T)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

说明 \mathbf{B} 是对称矩阵, 则 $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ 是二次型的矩阵表示, 即以 x_1, x_2, \dots, x_n 为自变量的二次型经可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 成为以 y_1, y_2, \dots, y_n 为自变量的二次型, 同时二次型矩阵由 \mathbf{A} 转换为 \mathbf{B} , 对于矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的这种关系我们有如下定义:

定义3 两个 n 阶矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 如果存在 n 阶可逆矩阵 \mathbf{C} , 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$. 称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 合同, 记作 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$. 并称由 \mathbf{A} 到 \mathbf{B} 的变换为合同变换, 称 \mathbf{C} 为合同变换的矩阵.

显然, 合同变换不改变矩阵的秩, 即若 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$, 则必有 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

特别的, 若 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 是正交变换, 即 \mathbf{C} 是正交矩阵, 则有

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$$

相似和合同都能推出等价, 即秩相等。
合同的充要条件是两个二次型具有相同的正负惯性指数。

即经过正交变换，二次型矩阵不仅合同而且相似.

合同矩阵具有如下性质：

- (1) 反身性 $A \simeq A$ ；
- (2) 对称性 若 $A \simeq B$ ，则 $B \simeq A$ ；
- (3) 传递性 若 $A \simeq B$ ， $B \simeq C$ ，则 $A \simeq C$.

三、巩固练习

求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$

的矩阵及二次型的秩，并把它写成矩阵形式.

四、小结

- 1. 二次型的矩阵表示；
- 2. 合同矩阵的性质。

五、布置作业

学习通作业

教学反思：



授课题目	§ 5.2 二次型的标准形与规范形	课次：22
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 了解二次型的规范形的概念；</p> <p>(2) 掌握化二次型为标准形的方法。</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 计算能力：学生应能够熟练运用正交线性替换、配方法或初等变换法将给定的二次型化为标准形；学生应能够计算二次型的特征值、特征向量，并构造正交矩阵进行线性替换。</p> <p>(2) 分析能力：学生应能够分析二次型在不同基下的标准形或规范形的变化，并理解其数学意义。</p> <p>(3) 综合运用能力：学生应能够将二次型的标准形与规范形知识与其他数学知识相结合，如线性代数、微积分等，解决更复杂的数学问题；学生应能够运用所学知识解决实际问题，如优化问题、力学问题等。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的实例和案例，激发学生对二次型的标准形与规范形的学习兴趣；引导学生认识到二次型的标准形与规范形在数学和实际应用中的重要性，培养他们的学习动力。</p> <p>(2) 培养严谨态度：在教学过程中，注重培养学生的严谨态度和科学精神。要求学生认真对待每一个计算步骤和推导过程，确保结果的准确性和可靠性；引导学生学会质疑和反思，培养他们的批判性思维和独立思考能力。</p>	
教学重点	化二次型为标准形的方法	
教学难点	化二次型为标准形的方法	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、讨论法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>复习用正交变换法化二次型为标准形的方法</p> <p>二、讲授新课</p> <p>(一) 化二次型为标准形的方法</p> <p>下面介绍两种化二次型为标准形的方法。</p> <p>1. 配方法</p> <p>例 1 用配方法将二次型</p> $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$ <p>化为标准形，并写出相应的线性变换矩阵。</p> <p>例 2 用配方法将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 化成标准形，并写出相应的线性变换。</p>		

下面将一般方法总结如下：

(1) 如果二次型 f 中含有变量 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的项集中，按 x_i 配方，然后按此法对其他变量逐步配方，直至将 f 配成平方和形式；

(2) 如果二次型 f 中没有平方项，只有混合项，例如有混合项 $x_i x_j (i \neq j)$ ，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (i \neq j, k \neq i, j)$$

使 f 中出现平方项，再按上面方法配方.

一般地，任何二次型总可以经过上述类似的方法化为标准二次型.

2. 正交变换法

定理 1 对于二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ，必有正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ 可将 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的特征值.

简言之，实二次型总可以通过正交变换化为标准形.

由上面的讨论可得用正交变换法化二次型为标准形的一般步骤：

- (1) 写出二次型的矩阵 \mathbf{A} ；
- (2) 求矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ；
- (3) 求矩阵 \mathbf{A} 的特征向量；
- (4) 将特征向量正交化、单位化得 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$
- (5) 构造矩阵 $\mathbf{P} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ，经 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ ，得

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

例 3 用正交变换法将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1^2 - 2x_3^2 + 4x_1 x_3$ 化为标准形，并写出所用的正交变换.

例 4 用正交变换法将例 2 中的二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3$ 化成标准形，并写出相应的正交变换.

(二) 二次型的规范形

定理 2 设实二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩为 r ，有两个可逆线性变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$$

及

<div><div>$x = Py$</div><div>使得</div><div>$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2, (\lambda_i \neq 0)$</div><div>及</div><div>$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2, (k_i \neq 0)$</div><div>则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数与 k_1, k_2, \cdots, k_r 中正数的个数相等（进而负数的个数也相等）.</div><div>这个定理称为惯性定理，这里不予证明.</div><div>惯性定理说明二次型的标准形虽然不唯一，但是任一标准形中非零项数、系数为正的项数、系数为负的项数都是唯一确定的.其中正系数的个数称为正惯性指数、负系数的个数称为负惯性指数.</div><div>推论 实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数.</div><div>定理 3 任一实二次型总可以经过可逆线性变换化为</div><div>$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$</div><div>其中 p 为二次型 f 的正惯性指数，r 为二次型 f 的秩.</div><div>定义 1 称 $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$ 为二次型的规范形.</div><div>例 5 将二次型</div><div>$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_3^2$</div><div>化成规范形，并求其正、负惯性指数.</div><div>三、巩固练习</div><div>用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 为标准形.</div><div>四、小结</div><div><div>1. 配方法化二次型为标准形；</div><div>2. 正交变换法化二次型为标准形。</div></div><div>五、布置作业</div><div>学习通作业</div></div>	<div>求正负惯性指数：</div> <div><div>1. 求特征值：实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数.</div><div>2. 配方法：看正、负平方项的个数。</div></div> <div>标准形虽然不唯一，但正负惯性指数相同</div>
<div>教学反思：</div>	

授课题目	§ 5.3 正定二次型	课次：23
教学目标	<p>1. 知识目标</p> <p>(1) 了解正定二次型的概念；</p> <p>(2) 了解正定二次型判定的方法.</p> <p>2. 能力目标</p> <p>(1) 计算能力：学生应能够准确计算二次型的值，以及利用不同的判定方法判断二次型的正定性；能够进行复杂的矩阵运算，如求特征值、特征向量，进行合同变换等。</p> <p>(2) 分析能力：学生应能够分析二次型的性质，如对称性、正定性等，并理解这些性质对二次型的影响；能够运用数学知识对实际问题进行建模，并判断其是否为正定二次型问题。</p> <p>(3) 综合运用能力：学生应能够将正定二次型的知识与其他数学知识相结合，如线性代数、微积分等，解决更复杂的数学问题；能够将理论知识应用于实际问题，如优化问题的求解、力学系统的稳定性分析等。</p> <p>3. 情感与态度目标</p> <p>(1) 激发学习兴趣：通过生动有趣的实例和案例，激发学生对正定二次型的学习兴趣，培养他们的学习动力；引导学生认识到正定二次型在数学和实际应用中的重要性，提高他们的学习热情。</p> <p>(2) 培养严谨态度：在教学过程中，注重培养学生的严谨态度和科学精神。要求学生认真对待每一个计算步骤和推导过程，确保结果的准确性和可靠性；引导学生学会质疑和反思，培养他们的批判性思维和独立思考能力。</p>	
教学重点	正定二次型的判定方法	
教学难点	正定二次型的判定方法	
教学手段	板书与多媒体结合、学习通	
教学方法	讲授法、实例分析法	
教学时数	2 课时	
教 学 过 程		备注
<p>一、复习引入</p> <p>有一类重要的二次型，它们的标准型中系数全为正或全为负，这类二次型在工程技术和优化等问题中有着广泛的应用.</p> <p>二、讲授新课</p> <p>(一) 正定二次型的概念</p> <p>定义 1 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (其中 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$)，如果对于任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq \mathbf{0}$，总有</p> $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ <p>则称该二次型为正定二次型；反之，如果对任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq \mathbf{0}$，总有</p>		

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$$

则称该二次型为负定二次型.

正定二次型的矩阵称为正定矩阵, 负定二次型的矩阵称为负定矩阵.

例如, 三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ 是正定二次型. 因为对于任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 总有 $f > 0$. 相应地, 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为正定矩阵.

但四元二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ 不是正定二次型. 因为当 $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1)^T \neq \mathbf{0}$ 时, $f = 0$.

二、正定二次型的判定

定理 1 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

定理 2 实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

为正定二次型的充分必要条件是 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

定理 2 表明, 如果二次型为标准形, 则很容易判定它的正定性. 那么如果二次型不是标准形时如何判定它正定与否呢? 事实上, 在判定二次型的正定性时, 还有下述重要结论:

定理 3 n 元二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定的充分必要条件有:

- (1) 矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值均为正数;
- (2) f 的正惯性指数为 n ;
- (3) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$;
- (4) 存在可逆矩阵 \mathbf{C} , 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$;
- (5) \mathbf{A} 的各阶顺序主子式

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n \text{ 都大于零.}$$

推论 n 元二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定有下述必要条件:

- (1) $|\mathbf{A}| > 0$;
- (2) f 中各变量平方项系数 (即矩阵 \mathbf{A} 中主对角线上元) 全大于 0.

例 1 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2$ 是否正定.

例 2 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 试问 t 为何值时, 该二次型为正定二次型.

例 3 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

是否为正定二次型.

类似地, 判定负定二次型也有类似于正定二次型的结论.

定理 4 n 元二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 负定的充分必要条件有:

- (1) 矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值均为负数;
- (2) f 的负惯性指数为 n ;
- (3) $\mathbf{A} \simeq -\mathbf{E}$;
- (4) 存在可逆矩阵 \mathbf{C} , 使得 $\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T \mathbf{C}$;
- (5) \mathbf{A} 的各阶顺序主子式中, 奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式

为正.

三、巩固练习

判别二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy$ 的正定性.

四、小结

1. 正定二次型的概念;
2. 正定二次型的判定。

五、布置作业

学习通作业

教学反思: